МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ

Для спеціальності:
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
спеціалізації:
151.1 «Обслуговування інтелектуальних інтегрованих систем»

Методичні вказівки

до виконання практичних занять

з навчальної дисципліни «Вища математика»

2019

Автор: О.М.Котова – викладач Харківського державного політехнічного коледжу

Рецензент: О.С. Омельченко – голова циклової комісії природничо-математичних дисциплін Харківського державного політехнічного коледжу

Методичні вказівки розглянуті і рекомендовані для використання цикловою комісією природничо-математичних дисциплін
Протокол № ____ від “___”_____20____ р.
Голова циклової комісії _____ С.О. Омельченко

Схвалено методичною радою Харківського державного політехнічного коледжу

Протокол № _____ від “____”_____20____р.

Голова методичної ради _____В.О. Величко

Вступ

Дані методичні вказівки призначені для організації практичних занять з дисципліни «Вища математика» та формування належного рівня засвоєння студентами даного курсу, без якого неможливе вивчення загально-технічних та спеціальних дисциплін.

Математика – одна з найдавніших наук, що зародилась на світанку цивілізації. Вона постійно збагачувалася, час від часу істотно відновлювалася і все більше утверджувалась як засіб пізнання закономірностей навколишнього світу. Розширюючи і зміцнюючи свої багатогранні зв‘язки з практикою, математика допомагає людству відкривати і використовувати закони природи і є у наш час могутнім рушієм розвитку науки і техніки.

Для свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і вмінь студентам пропонуються методичні вказівки до виконання практичних занять. Усі включені до вказівок теми викладено за єдиним методичним принципом.

Методична розробка має на меті допомогти майбутнім спеціалістам оволодіти системою математичних знань, вмінь і навичок, необхідних у майбутній трудовій діяльності, достатніх для вивчення інших дисциплін та продовження освіти.

Критерії оцінювання навчальних досягнень студентів на практичних заняттях

Оцінювання навчальних досягнень студентів повинно ґрунтуватися на позитивному принципі, що передбачає передусім врахування рівня досягнень студента, а не міри його невдач. Навчальні досягнення студентів характеризуються трьома рівнями: середнім, достатнім і високим.

Запропоновані нижче критерії базуються на загальновизнаній дидактичній класифікації рівнів навчальних досягнень студентів, яка відповідає сучасному стану педагогічних досліджень. Оцінювання якості математичної підготовки студентів здійснюється у двох напрямках: оцінювання рівня оволодіння теоретичними знаннями та оцінювання якості практичних умінь і навичок.

Рівень навчальних досягнень	**Оцінка**	**Критерії оцінювання навчальних досягнень студентів**
Середній	«3» задовіль-но	Студент ✓ відтворює означення основних математичних понять та формулювання найважливіших тверджень і правил без суттєвих помилок; ✓ виконує за зразком завдання з чітко заданими цілями і відомими йому способами їх досягнення, розв‘язування яких складається з невеликої кількості репродуктивних видів діяльності, може перевірити правильність виконання застосованих дій.
Достатній	«4» добре	Студент достатньо володіє навчальним матеріалом, а саме: ✓ відтворює означення математичних понять, установлює зв‘язки між ними, правильно застосовує їх у стандартних ситуаціях; ✓ відтворює формулювання математичних тверджень і правил; ✓ проводить обґрунтування математичних тверджень, правил і формул без логічних помилок, правильно посилаючись на твердження, що використовуються під час доведення; ✓ виконує з повним поясненням типові завдання з чітко заданими цілями, а вибір і реалізація засобів їх досягнення не

		вимагають продуктивної праці; ✓ аналізує правильність отриманих результатів.
Високий	«5» відмінно	Студент на високому рівня володіє навчальним матеріалом, а саме: ✓ відтворює означення математичних понять, установлює зв‘язки між ними; ✓ відтворює формулювання математичних тверджень і правил; ✓ обґрунтовує математичні твердження, правила і формули, перевіряючи справедливість тверджень, які використовуються в процесі доведення, встановлює обмеження , називає винятки і граничні випадки, розуміє основні ідеї та методи; ✓ виконує в межах навчальної програми завдання з чітко заданими цілями, а вибір і реалізація способів їх досягнення вимагають продуктивної діяльності; ✓ володіє навичками самоконтролю, постійно оцінює результати своєї діяльності.

Практичне заняття №1
Дослідження функцій із застосуванням похідної

Мета роботи: Ознайомити студентів з загальною схемою дослідження функції. Формування вмінь дослідження функцій та побудови їх графіків.

Методичні вказівки

Схема дослідження функції і побудови її графіка:

1. знайти область визначення функції;
2. дослідити функцію на парність і непарність;
3. дослідити функцію на періодичність;
4. дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву;
5. знайти критичні точки першого роду;
6. знайти інтервали монотонності і екстремуми функції;
7. знайти критичні точки другого роду;
8. знайти інтервали опуклості і точки перегину;
9. знайти асимптоти графіка функції;
10. знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
11. побудувати графік функції.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1. Провести повне дослідження функцій $y = \frac{x}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв'язання: Дослідження проводимо у такій послідовності:

1.Область визначення функції: $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

2.Перевірка парності або непарності підстановкою (-x) замість x:

$$y(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-4} = \frac{(-x)}{x^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} \Rightarrow y(-x) = -y(x)$$

Отже, функція непарна і її графік симетричний відносно початку координат.

3.Функція неперіодична.

4. Поведінка графіка функції поблизу точок його розриву $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Для цього знаходимо границі заданої функції, коли аргумент x прямує до точки розриву ліворуч і праворуч:

а) x=-2: ліворуч від точки x=-2 $\lim\limits_{x\to -2-0} \frac{x}{x^2-4} = \left\{\frac{-2}{0}\right\} = -\infty$

праворуч від точки x=-2 $\lim\limits_{x\to -2+0} \frac{x}{x^2-4} = \left\{\frac{-2}{-0}\right\} = \infty$

б) x=2: ліворуч від точки x=2 $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x}{x^2-4} = \left\{\frac{2}{-0}\right\} = -\infty$

праворуч від точки x=2 $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x}{x^2-4} = \left\{\frac{2}{0}\right\} = \infty$

5. Для функції y= $\frac{x}{x^2-4}$ знайдемо похідну і критичні точки першого роду;

$$y' = \frac{(x)' \cdot (x^2-4) - x \cdot (2 \cdot x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2 \cdot x^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}.$$

Видно, що $y' \neq 0$, оскільки у рівнянні $x^2+4=0$ дійсних коренів немає.

Точки, де $y' = \infty$, тобто $(x^2-4)^2 = 0$, не входять до області існування функції. Таким чином, критичних точок першого роду і екстремумів функції немає.

6. Простежимо поведінку функції в інтервалах монотонності $(-\infty;-2)$, $(-2;2), (2;\infty)$ Для цього на кожному інтервалі знайдемо знак першої похідної.

x	$(-\infty;-2)$	X=-2	(-2;2)	X=2	$(2;+\infty)$
y'	-	∞	-	∞	-
поведінка у (x)	↘	точка розриву	↘	точка розриву	↘

Функція *f(x)* на інтервалах $(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$ спадає.

7.Знайдемо другу похідну і критичні точки другого роду.

$$y'' = \left[-\frac{(x^2+4)}{(x^2-4)^2} \right]' = -\frac{(x^2+4)' \cdot (x^2-4)^2 - (x^2+4) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= -\frac{2x \cdot (x^4-8x^2+16) - 4x \cdot (x^4-16)}{(x^2-4)^4} = -\frac{(x^2-4) \cdot \left[2x \cdot (x^2-4) - 4x \cdot (x^2+4) \right]}{(x^2-4)^4} =$$

$$= -\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3} = -\frac{-2x^3-24x}{(x^2-4)^3} = -\frac{-2x \cdot (x^2+12)}{(x^2-4)^3} = \frac{2x \cdot (x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$y'' = \begin{Bmatrix} 0 \\ \infty \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{2x \cdot (x^2+2)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x \cdot (x^2+12) = 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases}$$

Отже, після розв'язування системи, маємо один дійсній корінь x=0. Це критична точка другого роду.

8. Тоді y(0)=0. Точка, підозріла на перегин, співпадає з точкою O(0;0) перетину графіка з осями координат.

Проаналізуємо поведінку функції в інтервалах $(-\infty;-2);(-2;0);(0;2);(2;+\infty);$

x	$(-\infty;-2)$	X= -2	(2;0)	X=0	(0;2)	X=2	$(2;+\infty)$
Знак y''	-	∞	+	0	-	∞	+
поведінка у(x)	∩	точка розриву	∪	точка перегину	∩	точка розриву	∪

На інтервалах $(-\infty;-2) \cup (0;2)$ графік функції спрямовано опуклістю вгору, а на інтервалах $(2;0) \cup (2;+\infty)$ – опуклістю вниз.

9. Асимптоти графіка функції:

а)похилі, що мають вигляд $y = kx + b$

де $k = \lim\limits_{x \Rightarrow \pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \Rightarrow \pm\infty} \dfrac{x}{x \cdot (x^2 - 4)} = 0.$

Тоді асимптота y=b – горизонтальна . Знайдемо b:

$b = \lim\limits_{x \Rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim\limits_{x \Rightarrow \pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$

Пряма y=0 (вісь Ox) є горизонтальною асимптотою графіка:

б)вертикальні асимптоти знаходяться в точках розриву функції. Це прямі x= -2 і x=2

Поведінка функції на кінцях інтервалу $(-\infty;+\infty)$:

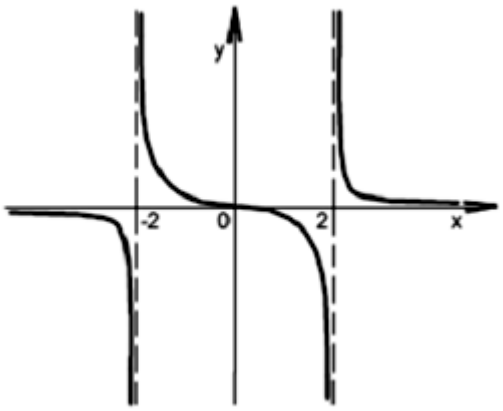
$\lim\limits_{x \Rightarrow -\infty} y(x) = \lim\limits_{x \Rightarrow -\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0,\ \lim\limits_{x \Rightarrow +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \Rightarrow +\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$

10. Точки перетину з осями координат знаходимо так:

а) з віссю Ox $\quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ точка O(0;0)

б) з віссю Oy $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow$ y=0$\Rightarrow$ точка O(0;0)

11. Графік функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ має вигляд



Завдання

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

1. $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$
2. $y = \dfrac{x^2-5}{x-4}$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте достатні умови зростання і спадання функції.
2. Які точки називають критичними точками першого роду?
3. Які точки називають критичними точками другого роду?
4. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
5. Сформулюйте достатню умову екстремуму функції.
6. Сформулюйте достатні умови опуклості вгору та опуклості вниз функції, що має другу похідну на заданому інтервалі.
7. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину функції.

Практичне заняття №2
Обчислення визначених інтегралів за різними методами.

Мета роботи: Систематизувати вміння та навички студентів по темі «Методи інтегрування»

Приклади розв'язання задач

Формула Ньютона—Лейбніца.

Якщо функція f(x) визначена і неперервна на відрізку [a; b] і F(x)- її довільна первісна на цьому відрізку $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Безпосереднє інтегрування .

Під безпосереднім інтегруванням розуміють такий спосіб знаходження інтеграла , коли шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей визначеного інтеграла приходимо до одного чи декількох табличних інтегралів .

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int_1^3 \frac{3dx}{x^2}$

Розв'язання. використаємо властивості степеня з від'ємним показником $(a^{-m} = \frac{1}{a^n}; a > 0)$

$$\int_1^3 \frac{3dx}{x^2} = 3\int_1^3 x^{-2}dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^3 = -3x^{-1}|_1^3 = \frac{-3}{x}\Big|_1^3 = \frac{-3}{3} - \frac{-3}{1} = 2$$

Відповідь: $\int_1^3 \frac{3dx}{x^2} = 2$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int_\pi^{2\pi} (-\sin x)dx$

Розв'язання. $\int\limits_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx = \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos\pi = 1+1 = 2$

Відповідь: $\int\limits_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx = 2$

Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної виконується в такій послідовності:

1. ввести нову змінну;
2. знайти диференціал нової змінної;
3. знайти нові межі визначеного інтегралу;
4. весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну;
5. обчислити отриманий інтеграл.

Приклад 3. Обчислити інтеграл:

Розв'язання. $\int\limits_{4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left|\begin{array}{c} x = t^2,\ \ dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_{2}^{3}\frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_{2}^{3}\frac{t+1-1}{t+1}dt =$

$$= 2\int\limits_{2}^{3}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t-\ln|t+1|)\Big|_{2}^{3} = 2(3-\ln 4-(2-\ln 3)) = 2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Метод інтегрування частинами.

Якщо функції $u(x)$ і $\upsilon(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_{a}^{b}u(x)\upsilon'(x)dx = u(x)\upsilon(x)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b}\upsilon(x)u'(x)dx.$$

Коротко цю формулу записують так:

$$\int\limits_{a}^{b}ud\upsilon = u\upsilon\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b}\upsilon du. \qquad (1)$$

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Прилад 4: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2xdx = \left|\begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx; \\ \cos 2xdx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx =$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Завдання

1.Обчислити визначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування (номер варіанту співпадає з номером по списку)

1. $\int_0^2 (2-x)^2\,dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$ **3.** $\int_0^4 \left(2\sqrt{x}-x^2\right)dx$ **4.** $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}\,dx$

5. $\int_{-1}^1 \left(-x+5-3x^2\right)dx$ **6.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos x dx$ **7.** $\int_1^8 \left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ **8.** $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3}\,dx$

9. $\int_{-1}^1 \left(x^2-2\right)dx$ **10.** $\int_0^1 \left(e^x+x\right)dx$ **11.** $\int_1^4 \left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ **12.** $\int_{-2}^2 \left(1+x^2\right)dx$

13. $\int_1^8 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **14.** $\int_{-1}^1 \left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ **15.** $\int_2^3 \frac{1+x^5}{x^4}\,dx$ **16.** $\int_{-1}^0 \left(x^3+2x\right)dx$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$ **18.** $\int_1^{16} \left(\sqrt{x}-2\right)dx$ **19.** $\int_1^2 \frac{1+x^2}{x^6}dx$ **20.** $\int_1^8 \left(1-4\sqrt[3]{x}\right)dx$

21. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3\sin^2 x}$ **22.** $\int_1^4 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ **23.** $\int_1^2 \frac{1-x^6}{x^5}\,dx$ **24.** $\int_0^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

25. $\int_0^8 \left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ **26.** $\int_{-1}^1 \left(3-x+6x^2\right)dx$ **27.** $\int_{-3}^3 \left(1+x\right)^2 dx$ **28.** $\int_{-1}^1 \left(1+\sqrt{3x^2}\right)dx$

29. $\int_0^1 \left(e^x+x^2\right)dx$ **30.** $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3}\,dx$

2.Обчислити визначені інтеграли (номер варіанту співпадає з номером по списку)

1. $\int_0^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx;$
2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5};$
3. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{ctgx}\cdot\sin^2 x};$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x\cdot\sin 7x dx;$
5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x\cdot\cos 7x dx;$
6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\cdot\sin 4x dx;$
7. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{3\sin x}+1\cdot\cos x dx;$
8. $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x\cdot\sin x dx};$
9. $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin x}{3-\cos x}dx;$
10. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2+\sin x};$
11. $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin t dt}{1+\cos t};$
12. $\int_0^{\pi/6} e^{\sin x}\cdot\cos x dx;$
13. $\int_0^1 e^{x^2} x dx;$
14. $\int_0^{\sqrt[3]{2}} 3e^{x^3} x^2 dx;$
15. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$
16. $\int_{\frac{1}{3}}^3 xe^{3x} dx;$
17. $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx;$
18. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;$
19. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{1-4x^3};$
20. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$
21. $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1+9^x};$
22. $\int_1^e \frac{\sin\ln x}{5x}dx;$
23. $\int_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}};$

24. $\int_0^{0,5} e^{\sin x} \cdot \cos x dx;$

25. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x} dx;$

26. $\int_0^{0,5} 5e^{\sin x} \cdot (-\cos) x dx;$

27. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\left(\sqrt{1+tgx}\right)^3}{\cos^2 x} dx;$

28. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx;$

29. $\int_{\frac{1}{3}}^{3} 3xe^{x^2} dx;$

30. $\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x dx}{5+\sin x};$

Контрольні запитання

1. Означення визначеного інтеграла.
2. Назвіть відмінність визначеного інтеграла від невизначеного.
3. Назвіть властивості визначеного інтеграла.
4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Назвіть методи інтегрування.

Практичне заняття № 3
Розв'язання прикладів.
Аналіз контрольної роботи

Мета роботи: Проконтролювавши рівень знань, систематизувати знання вміння та навички студентів по темі «Застосування похідної та інтеграла»

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Визначити проміжки спадання функції

$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$.

Розв'язання: При дослідженні функції на монотонність необхідно:

1) Знайти похідну функції.

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' - \frac{5}{2}\left(x^2\right)' + 6\left(x\right)' = x^2 - 5x + 6$$

2) Визначити критичні точки

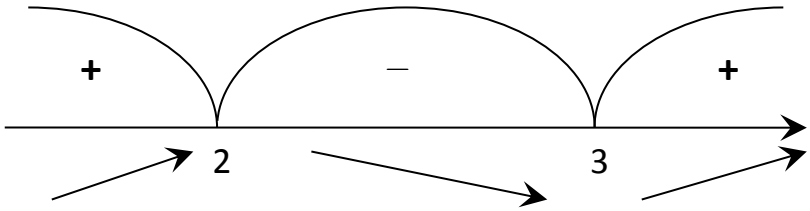
$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{5-1}{2} = 2;\ x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$ критичні точки I роду

3) Критичними точками обл. визначення розбиваємо на проміжки і визначаємо знак похідної на кожному проміжку.



4) Якщо похідна на проміжку від'ємна, то функція спадає на цьому проміжку ⇨функція спадає на (2;3)

Відповідь: х∈ (2;3)

Приклад 2. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $V(t) = 3t^2 – 2t -1$ (м/с). Визначити шлях ,який пройшло тіло за інтервал часу від$t_1 = 0$ до $t_2 = 5$.

Розв'язання:

Дано:

$v(t)=3t^2-2t-1$ (м/с)

$t_1=0$ с, $t_2=5$ с

S-?

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

$$S = \int_0^5 (3t^2 - 2t - 1)dt = 3\int_0^5 t^2 dt - 2\int_0^5 tdt - \int_0^5 dt =$$

$$= 3\frac{t^3}{3}\Big|_0^5 - 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^5 - t\Big|_0^5 = t^3\Big|_0^5 - t^2\Big|_0^5 - t\Big|_0^5 = (5^3 - 0^3) - (5^2 - 0^2) - (5 - 0) =$$

$$=125-25-5=95 \text{ (м)}$$

Відповідь: S=95 м.

Завдання

1. Дослідити функцію та побудувати її графік $y= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$.
2. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $V(t) = 9t^2 – 2t - 8$ (м/с). Визначити шлях , який пройшло тіло за інтервал часу від$t_1= 0$ до $t_2= 3$.
3. Знайти похідну функції в точці

$y = \frac{3-x}{x^2+5x-1}$; $y'(0)$

$S = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$; $S(2)$

$y = e^{\sin 3x}$; $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
2. Поясніть правило знаходження похідної складеної функції.
3. За якою формулою обчислюється шлях, пройдений точкою?
4. Наведіть схему дослідження функції.

Практичне заняття №4
Диференціальні рівняння другого порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Мета роботи: Формування навичок розв'язування лінійних диференціальних рівнянь II порядку.

Методичні вказівки:

Значним класом диференціальних рівнянь другого порядку є **лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.** Такі рівняння мають загальний вигляд

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad (1)$$

де $a, b, c \in R - const$; $f(x) -$ довільна функція, неперервна і диференційована в області визначення рівняння.

Якщо $f(x) = 0$ для будь-якої точки з області визначення диференціального рівняння, то (1) називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

У разі коли $f(x) \neq 0$ хоча б в одній з точок області визначення диференціального рівняння, то (1) називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (2)$$

Теорема(структура загального розв'язку лінійного однорідного рівняння).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (2) є лінійною комбінацією всіх лінійно незалежних частинних розв'язків. Тобто, якщо $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки (3.4), то загальним розв'язком рівняння (2) буде функція

$y = \varphi(x, C_1, C_2) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), C_1, C_2 \in R - const.$ *(3)*

Будемо шукати розв'язок рівняння (2) у вигляді $y = e^{kx}$, де k– деяке невідоме дійсне число. Знайдемо необхідні похідні:

$$y' = ke^{kx}; y'' = k^2e^{kx}.$$

Підставимо y, y', y'' до рівняння:

$a \cdot k^2 \cdot e^{kx} + b \cdot k \cdot e^{kx} + c \cdot e^{kx} = 0.$

Тоді $e^{kx}(a \cdot k^2 + b \cdot k + c) = 0.$

$$e^{kx} \neq 0, \quad a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0.$$

Отже, функція $y = e^{kx}$ є розв'язком (2), якщо k є коренем рівняння

$$a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0 \qquad (4)$$

Це рівняння називається **характеристичним рівнянням лінійного однорідного диференціального рівняння** (2).

Розв’язок квадратного рівняння визначається його дискримінантом $D = b^2 - 4ac$.Можливі три випадки:

1. $D = b^2 - 4ac > 0$;
2. $D = b^2 - 4ac = 0$;
3. $D = b^2 - 4ac < 0$.

Розглянемо кожний випадок окремо.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$. В цьому випадку k_1, k_2 – корені дійсні та різні. Частинні розв’язки диференціального рівняння (2) мають вигляд: $y_1 = e^{k_1 x} i y_2 = e^{k_2 x}$. Вище було показано, що ці функції лінійно незалежні. Отже, згідно з теоремою про структуру розв’язку ***загальний розв’язок*** рівняння (2) матиме вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \;\; C_1, C_2 - \; const \qquad (5)$$

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. У цьому випадку характеристичне рівняння має два однакових кореня *k.* Лінійно незалежними частинними розв’язками будуть: $y_1 = e^{kx}\; i y_2 = x e^{kx}$. Лінійна незалежність цих функцій показана вище. Отже, загальний розв’язок (2) в цьому разі буде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + x C_2), \; (6)$$

$$C_1, C_2 - \; const.$$

3. $D = b^2 - 4ac < 0$.У цьому випадку характеристичне рівняння дійсних коренів не має. Але є два комплексно-спряжених кореня:

$$k_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} i k_2 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Позначимо $\alpha = \frac{-b}{2a}$; $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Тоді коренями характеристичного рівняння (4) будуть комплексно спряжені числа $k_1 = \alpha + i\beta$; $k_2 = \alpha - i\beta$. Оскільки числа комплексно спряжені, для розв’язку достатньо взяти один із коренів. Нехай це буде $k_1 = \alpha + i\beta$.

Розв’язком диференціального рівняння (2) буде функція

$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$.

Застосуємо відому формулу Ейлера

$e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$.

За один частинний розв’язок візьмемо дійсну частину отриманого комплексного числа, а за другий – уявну, отримаємо

$$y_1 = Re(e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2 = Im(e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці функції лінійно незалежні. Отже, **загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння у випадку комплексних коренів** буде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \;\; C_1, \; C_2 - \; const.$$

Зауваження

Для того, щоб виписати характеристичне рівняння для лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $ay'' + +by' + cy = 0$, достатньо замінити у ньому похідні параметром k у степені, що відповідає порядку відповідної похідної ($y'' \leftrightarrow k^2$; $y' \leftrightarrow k;\ y \leftrightarrow 1$). Отримаємо рівняння

$a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0.$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ за початкових умов $y(0) = 3, y'(0) = 4.$

Розв'язання:

а) Дане рівняння – лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Будемо шукати розв'язок у вигляді $y = e^{kx}$. Знайдемо потрібні похідні:

$y' = ke^{kx};\ y'' = k^2e^{kx}$. Підставимо y, y', y'' до рівняння

$k^2e^{kx} - 3ke^{kx} + 2e^{kx} = 0;\ e^{kx}(k^2 - 3k + 2) = 0$

Характеристичне рівняння для вихідного диференціального рівняння має вигляд

$k^2 - 3k + 2 = 0.$

Розв'яжемо його:

$$k_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2};\ k_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1; k_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Отже, отримали два частинних розв'язки: $y_1 = e^x;\quad y_2 = e^{2x}.$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x};\quad C_1, C_2 - \ const.$

б) Тепер розв'яжемо задачу Коші для початкових умов $y(0) = 3$, $y'(0) = 4.$

Підставимо умову $y(0) = 3$ у загальний розв'язок:

$3 = C_1e^0 + C_2e^{2\cdot 0} = C_1 + C_2.$

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}.$

Підставимо умову $y'(0) = 4$ у формулу для y':

$4 = C_1e^0 + 2C_2e^{2\cdot 0} = C_1 + 2C_2.$

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 + 2C_2 = 4. \end{cases} \begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 + 2C_2 = 4. \end{cases} \begin{cases} C_1 + 1 = 3; \\ C_2 = 1. \end{cases} \begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші (частинним розв'язком для початкових умов $y(0) = 3, y'(0) = 4$) буде функція

$y = 2e^x + e^{2x}.$

Відповідь: $y = 2e^x + e^{2x}$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y =$ 0за початкових умов $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Розв'язання.

а) Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння.

Дане рівняння – лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння, зробивши заміну

$y'' \leftrightarrow k^2;\ y' \leftrightarrow k;\ y \leftrightarrow 1;$

$k^2 - 2k + 1 = 0; \quad (k-1)^2 = 0.$

Це рівняння має 2 однакових корені $k = 1$ (корінь $k = 1$ має кратність 2).

Частинні розв'язки будуть $y_1 = e^x; \quad y_2 = xe^x.$

Як було показано вище, ці розв'язки – лінійно незалежні функції. Загальний розв'язок матиме вигляд

$y = C_1\ y_1 + C_2\ y_2 = C_1\ e^x + C_2\ xe^x = e^x(C_1 + xC_2);\ C_1, C_2 - const.$

б) Тепер розв'яжемо задачу Коші для початкових умов $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Підставимо умову $y(0) = 1$ у загальний розв'язок:

$1 = e^0(C_1 + 0 \cdot C_2) = C_1.$

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$y' = C_1e^x + C_2e^x + xC_2e^x = e^x(C_1 + (1+x)C_2).$

Підставимо умову $y'(0) = 0$ у формулу для y':

$0 = e^0(C_1 + (1+0)C_2) = C_1 + C_2.$

Отримали систему рівнянь

$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = -1. \end{cases}$

Отже, розв'язком задачі Коші (частинним розв'язком для початкових умов $y(0) = 1, y'(0) = 0$ буде функція

$y = e^x(1 - x).$

Відповідь: $y = e^x(1 - x).$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$ за початкових умов $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Розв'язання .

а) Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння.

Запишемо характеристичне рівняння, зробивши заміну:

$y'' \leftrightarrow k^2; y' \leftrightarrow k; y \leftrightarrow 1;$

$k^2 - 2k + 2 = 0$

$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$

Отримали комплексно спряжені корені характеристичного рівняння:

$k_1 = 1 + i\ ;\ k_2 = 1 - i.$ Для коренів $\alpha = 1;\ \beta = 1.$

Отже, отримали два частинних розв'язки.

Частинні розв'язки будуть: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^x \cos x; \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^x \sin x.$

Ці розв'язки – лінійно незалежні функції. Загальний розв'язок матиме вигляд $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^x \cos x + C_2\, e^x \sin x = e^x\,(C_1 \cos x + C_2 \sin x);$ $C_1, C_2 - const.$

б) Тепер розв’яжемо задачу Коші для початкових умов
$y(0) = 1, y'(0) = 1.$
Підставимо умову $y(0) = 1$ у загальний розв’язок:
$1 = e^0(C_1 \cos 0x + C_2 \sin 0x) = C_1$.
Знайдемо похідну від загального розв’язку:
$y' = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) =$
$= e^x\big(C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)\big).$
Підставимо умову $y'(0) = 1$ у формулу для y':
$1 = e^0\big(C_1(\cos 0 - \sin 0) + C_2(\cos 0 + \sin 0)\big) = C_1 + C_2.$
Отримали систему рівнянь $\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 + C_2 = 1, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 0. \end{cases}$
Отже, розв’язком задачі Коші (частинним розв’язком для початкових умов $y(0) = 1, y'(0) = 1$) буде функція $y = e^x \cos x.$
Відповідь: $y = e^x \cos x$

Завдання

Знайдіть частинний розв’язок диференціального рівняння

1. $y'' + 3y' + 2y = 0,$ якщо $y = -1,$ $y' = 3$ при $x = 0.$
2. $y'' - 4\sqrt{2}\,y' + 6y = 0,$ якщо $y = -3,$ $y' = \sqrt{2}$ при $x = 0.$
3. $y'' - 9y = 0,$ якщо $y = 2,$ $y' = 6$ при $x = 0$.
4. $.y'' - 10y' + 25y = 0,$ якщо $y(0) = 2,$ $y'(0) = 8.$

Контрольні запитання

1. Як записується в загальному вигляді лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Як записується в загальному вигляді лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Що таке характеристичне рівняння?
4. Як визначити лінійну залежність чи лінійну незалежність функцій.
5. Який вигляд має загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння:
    a. дійсні різні;
    b. дійсні і рівні;
    c. комплексно-спряжені?

Практичне заняття №5
Розв'язання диференціальних рівнянь. Залік по темі

Мета роботи: Узагальнити знання, вміння та навички студентів по темі «Диференціальні рівняння».

Приклади розв’язання завдань

Приклад1. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

$(x + xy^2)dx + \sqrt{y^2 - y^2x^2}\, dy = 0.$

Розв'язання. Для того, щоб визначити тип рівняння, зробимо деякі спрощення:

$$(1 + y^2)xdx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

Причому $M_1(x) = x;\ N_1(y) = (1 + y^2);\ M_2(x) = \sqrt{1 - x^2};\ N_2(y) = y$. Щоб відокремити змінні, помножимо ліву і праву частин на множник:

$\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{1-x^2}};\ x^2 < 1,\ |x| < 1.$

Отримаємо рівняння $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0$

Змінні відокремили, можна інтегрувати:

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = 0, -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\ln|1 + y^2| = C;$ *C-const.*

Отже, загальний інтеграл рівняння буде $\ln|1 + y^2| = 2\sqrt{1 - x^2} + C;$ $C - const.$

Отже, у вихідному рівнянні область визначення по змінній x є $|x| \leq 1$, а після відокремлювання змінних випали з розгляду точки $x_1 = 1; x_2 = -1.$

Зауваження

Накладаючи умову на добуток функцій $N_1(y)M_2(x) \neq 0$**,** ми тим самим маємо ймовірність втрати розв'язків. Після отримання загального розв'язку (інтеграла) вихідного рівня необхідно впевнитися, що розв'язки в точках *(x,y)*, що відповідають умові, є частинними розв'язками рівняння. Тобто необхідно підставити ці точки до загального інтегралу й отримати визначену сталу C**.** Якщо ж розв'язок у таких точках не можна отримати за будь-яких значень C**,** то маємо в цих точках частинний розв'язок.

У вищенаведеному прикладі у вихідному рівнянні область визначення за змінною x є $|x| \leq 1$, а після відокремлювання змінних випала з розгляду точки $x_1 = 1; x_2 = -1.$ Отже, в точках $x_1 = 1; x_2 = -1$ розв'язок може бути загубленим. Перевіримо, підставивши точки до розв'язку:

$\ln|1 + y^2| = 2\sqrt{1 - 1} + C;$

$\ln|1 + y^2| = C;$

$1 + y^2 = e^c = \overline{C};$

$y^2 = \overline{C} - 1; \quad y = \pm\sqrt{\overline{C} - 1}.$

Отримали, що для $\boldsymbol{C \geq 1}$ і точок $x_1 = 1; x_2 = -1$ значення y існують, тобто через точки $x_1 = 1; x_2 = -1$ проходить частинний розв'язок.

Відповідь: $\ln|1 + y^2| = 2\sqrt{1 - x^2} + C$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - y = e^x.$

Розв'язання: Дане рівняння – лінійне неоднорідне першого порядку. Розв'яжемо його за методом Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставимо до вихідного рівняння

$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v = e^x; \quad u' \cdot v + u(v' - v) = e^x.$

Будуємо систему

$$\begin{cases} v' - v = 0;\ \frac{dv}{dx} = v; \quad \frac{dv}{v} = dx;\ \ln|v| = x;\ v = e^x; \\ u' \cdot v = e^x;\ u' \cdot e^x = e^x;\ \frac{du}{dx} = 1;\ du = dx;\ u = x + C;\ C - const. \end{cases}$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння буде

$y = u \cdot v = (x + C)e^x; \quad C - const.$

Відповідь: $y = (x + C)e^x$

Завдання

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $(x - y)\, y\, dx - x^2 dy = 0.$
2. $(x^2 - 2xy)\, dy - (xy - y^2)\, dx = 0.$
3. $. x^2 y' = y^2 - xy + x^2.$

Розв'яжіть задачу Коші.

1. $(1 + x^2)y' - xy = 2x; \qquad y(0) = 0.$
2. $\frac{dy}{dx} - y = 2x - x^2; \qquad y(0) = 1.$
3. $xy' - 2y = x^3 e^x; \qquad y(1) = 0.$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння?
3. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
4. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння?

Література

Базова література

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу 10-11класи-К,Зодіак-ЕКО,2000.
2. Алгебра і початки аналізу /За ред. Колмогорова А.М., Освіта,1993/
3. Математика: Програма для навчальних закладів підготовки молодших спеціалістів /Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.К-2001.
4. Афанасьева, Бродский Я.С, Гуткин И.И., Павлов А.Л. Сборник задач по математике для техникумов. – М : Наука, 1992
5. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа /Под ред. Г.Н. Яковлева.Ч.2. – М.:Наука, 1987
6. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа /Под ред. Г.Н. Яковлева.Ч.2. – М.:Наука, 1968
7. М.І.Шкіль,Т.В.Колесник,В.М.Котлова Вища математика (у трьох книгах),К.Либідь,1994р
8. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.-М:Выс.шк,1979,1983,1990.
9. О.М.Афанасьєва, Бродський Я.С, Павлов А.Л.,А.К.Слипенко. Дидактичні матеріали з математики-К. Вища школа,2001р.
10. Вычислительная математика / Н.И.Данилина и др.-М:Высш.шк,1985
11. О.М.Афанасьева, Бродский Я.С, Павлов А.Л.,А.К.Слипенко. Математика-К. Вища школа,2001р.

Допоміжна література

1. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Інтеграл та його застосування» -ХЕМТТБ. 2011р.
2. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Похідна та її застосування» -ХЕМТТБ. 2011р.
3. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Комплексні числа» -ХЕМТТБ. 2005р.
4. Методична розробка „Організація пізнавальної діяльності студентів при вивченні теми «РЯДИ» з дисципліни “Основи вищої математики””-ХЕМТТБ. 2009 р.
5. Презентація по темі «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» -ХЕМТТБ. 2013 р.

Інформаційні ресурси

1. http://math.ru
2. http://www.webmath.ru
3. http://www.formula.co.ua
4. http://ru.wikipedia.org

Зміст

Вступ……3
Критерії оцінювання навчальних досягнень студентів на практичних заняттях……4
Практичне заняття № 1……...6
Практичне заняття №2……. .9
Практичне заняття №3……..12
Практичне заняття №4……..13
Практичне заняття №5……..18
Література……...21
Зміст……22