

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ**

Для спеціалізації 5.141.3  
«Обслуговування та ремонт  
електроустаткування автомобілів  
і тракторів»

**Методичний посібник  
для самостійної роботи студентів  
з навчальної дисципліни «Основи вищої математики»  
для спеціальності 5.141 «Електроенергетика,  
електротехніка та електромеханіка»**

**2018**

Автор: О.М.Котова – викладач Харківського державного політехнічного коледжу

Рецензент: О.С. Омельченко – голова циклової комісії природничо-математичних дисциплін Харківського державного політехнічного коледжу

Методичний посібник розглянутий і рекомендований для використання цикловою комісією природничо-математичних дисциплін

Протокол № \_\_\_\_\_ від “\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ р.

Голова циклової комісії \_\_\_\_\_ С.О. Омельченко

Схвалено методичною радою Харківського державного політехнічного коледжу

Протокол № \_\_\_\_\_ від “\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ р.

Голова методичної ради \_\_\_\_\_ В.О. Величко

# Модуль 1: Комплексні числа

## Теми, які виносяться на самостійне вивчення:

### 1. Розв'язання систем 3-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими

**Метод Гауса.** Він полягає ось у чому: систему рівнянь зводять до рівносильної системою з трикутною матрицею (матриця, в якій всі елементи, що розміщені нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю). Такі дії називають прямим ходом. З отриманої трикутної системи невідомі змінні визначають за допомогою послідовних підстановок (зворотний хід).

Для виконання прямого ходу здійснюють такі перетворення:

- 1) множать або ділять коефіцієнти і вільні члени на одне й те саме число;
- 2) додають і віднімають рівняння;
- 3) переставляють рівняння системи;
- 4) виключають із системи рівняння, в яких усі коефіцієнти при невідомих та вільні члени дорівнюють нулю;

За допомогою операцій 1) і 2) можна виключити будь-яке невідоме з усіх рівнянь системи, крім одного. При цьому невідоме, яке виключають, називають *провідним невідомим*, а рівняння, в якому зберігаються провідне невідоме, - *провідним*.

**Приклад 1.** Розв'язати методом Гауса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

За провідне рівняння виберемо друге рівняння, а за провідне невідоме виберемо  $x_1$ . Переставимо друге рівняння на місце першого:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Запишемо матрицю, яка складається з коефіцієнтів системи і стовпця вільних членів. Таку матрицю називають *розширеною матрицею системи*. Стовпець вільних членів відокремлюємо від матриці коефіцієнтів а системою вертикальною рисою:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Для того, щоб дістати у першому стовпці  $a_{21}=a_{31}=0$ , помножимо перший рядок спочатку на  $-4$  і додамо до другого рядка, а потім на  $-2$  і додамо до третього рядка

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Поділимо другий рядок на  $-10$ , отримані результати помножимо на  $7$  і додамо до третього рядка

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0,7 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1,9 & 3,8 \end{array} \right)$$

Запишемо нову рівносильну систему, яка відповідає отриманій розширеній матриці

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 0,7x_3 = 0,4 \\ 1,9x_3 = 3,8 \end{cases}$$

Виконуючи зворотний хід, за допомогою послідовних підстановок знаходимо

$$1,9x_3 = 3,8; \quad x_3 = 2$$

$$x_2 + 0,7 \cdot 2 = 0,4; \quad x_2 = -1$$

$$x_1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 2; \quad x_1 = 1$$

Отже, дістали відповідь  $(1; -1; 2)$

### **Метод Крамера**

Розв'язування системи лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Нехай  $a_{22} \neq 0$ . Тоді система (1) рівносильна системі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases} \quad (2)$$

Друге рівняння системи (2) помножимо на  $a_{12}$  і віднімемо почленно від першого рівняння. Дістанемо

$$(a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot a_{12}) \cdot x_1 = b_1 - b_2 \cdot \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (3)$$

Якщо  $a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot a_{12} \neq 0$ , тобто  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ , то

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad (4)$$

Підставивши це значення  $x_1$  у друге рівняння системи (2), дістанемо

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad (5)$$

Неважко помітити, що формули (4) і (5) можна записати за допомогою

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}}$$
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda} \cdot x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda} \quad (6)$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a & \\ a_{21}a_{22} & \end{vmatrix} \cdot \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1a_{12} & \\ b_2a_{22} & \end{vmatrix} \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_1 & \\ a_{21}b_2 & \end{vmatrix}.$$

Метод визначників можна застосувати до системи з будь-якою кількістю рівнянь.

[illegible]
$$\Delta = \left| \begin{array}{c} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{array} \right| \quad (8)$$

Тоді система (7) має єдиний розв'язок вигляду:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 25;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -25$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 50.$$

знаходимо значення  $x_1, x_2, x_3$  за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2,$$

Розглянемо випадок, коли визначник системи дорівнює нулю. Тут можливі 2 варіанти:

1. Визначник  $\Delta = 0$  і кожний визначник  $\Delta_k = 0 (k=1,2,3,...n)$  є пропорційними. При цьому система має нескінченну кількість розв'язків.
2. Визначник  $\Delta = 0$  і хоча б один з визначників  $\Delta_k \neq 0$ . Це має місце тоді, коли коефіцієнти при всіх невідомих, за виключенням  $x_k$  є пропорційними. При цьому система розв'язків не має.

### Завдання

Розв'язати системи лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса

$$1 \begin{cases} x + y - z = 36 \\ x + z - y = 13 \\ y + z - x = 7 \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} x + y + z = 36 \\ 2x - 3z = -17 \\ 6x - 5z = 7 \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 46 \\ x + 2y + z = 8 \\ x - 7y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} 2x + y + 5z = 27 \\ 5x + 2y + 13z = 70 \\ 3x - z = -2 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} 4x + y - 3z = -1 \\ 8x + 3y - 6z = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ 3x - 5y - 6z = -21 \\ 3x + y + z = -4 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 4x - 3y + z = 43 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ 5x - 3y + 2z = -4 \\ 4x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \\ x - 5y - 8z = 23 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 5x + 6y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - 3z = 9 \\ 4x - 3y + 2z = -15 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15 \\ x + y + 5z = 16 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} 12x - 13y - 4z = -10 \\ 7x - 9y - 11z = 0 \\ 2x - 17y - 15z = -7 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 5x - 19y - z = 26 \\ 2x - 5y - z = 6 \\ 8x - 31y - 4z = 35 \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} 8x - y + 3z = 22 \\ 4x + y + 6z = -1 \\ 13x + y + 16z = 5 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 6x + 3y - 5z = 0 \\ 9x + 4y - 7z = 3 \\ 14x + 6y - 11z = 6 \end{cases}$$

$$23 \begin{cases} 7x - 2y = -24 \\ 6x - 4y - 5z = -37 \\ 4x + 3y + 6z = 13 \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} -5y + z = 23 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ x + 6y - 2z = -21 \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} 5x - 5y - 4z = -3 \\ x - y + 5z = 11 \\ 4x - 3y - 6z = -9 \end{cases}$$

$$12 \begin{cases} 5x - 9y - 14z = 6 \\ x + 7y + 5z = 11 \\ 5x - 21y - 27z = -5 \end{cases}$$

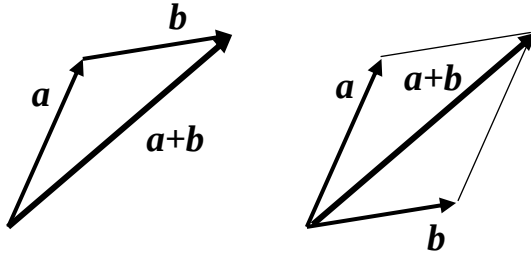
$$25 \begin{cases} 13x + 2z = -37 \\ 2x - 8y + 5z = 15 \\ 19x - 11y + 9z = -26 \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} 4x - 7y - 2z = 0 \\ x - 3y - 4z = 16 \\ 3x - 8y - 7z = 22 \end{cases}$$

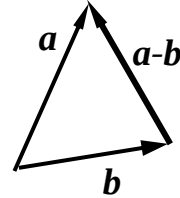
**2-3 Вектори на площині та в просторі. Розкладання вектора на складові. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів та його властивості. Кут між векторами.**

**Дії над векторами**

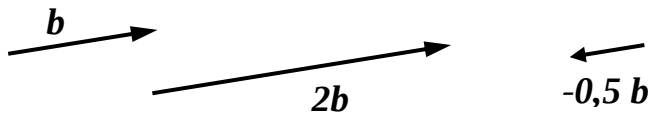
1. Додавання векторів



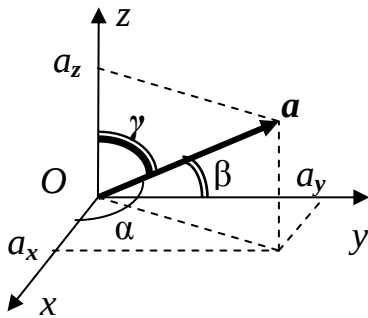
2. Віднімання векторів



3. Множення на число (приклади)



**Вектори у декартовій системі координат**



$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = (a_x; a_y; a_z) ,$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) .$$

Довжина вектора  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$

Напрямні косинуси

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} , \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} , \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} .$$

Дії над векторами, заданими у координатній формі

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z) ,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z) ,$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z) .$$

Умова колінеарності векторів

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} .$$

Скалярним добутком двох векторів, які задано координатами, називається число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

**Скалярним добутком** векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$

Кут між двома векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  можна знайти за формулою:  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

або

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

**Умова перпендикулярності векторів:** Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

**Приклад 1.** Знайдіть значення  $m$  і  $n$ , при яких вектори  $\vec{a}(3; m; 5)$  і  $\vec{b}(6; -2; n)$  колінеарні.

**Розв'язання:** У колінеарних векторів координати пропорційні, звідси  $\frac{3}{-6} = \frac{m}{-2} = \frac{5}{n}$ . Маємо два рівняння:

$$1) \frac{3}{-6} = \frac{m}{-2} \quad m = \frac{3 \cdot (-2)}{-6} = 1;$$

$$2) \frac{3}{-6} = \frac{5}{n} \quad n = \frac{5 \cdot (-6)}{3} = -10.$$

**Відповідь:**  $m=1, n=-10$ .

**Приклад 2.** Знайдіть координати і довжини векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ , якщо

$A(2; -3; -1), B(-4; -8; 5), C(3; 1; -2)$ .

**Розв'язання:**  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

$$\overrightarrow{AB} (-4 - 2; -8 - (-3); 5 - (-1)) = \overrightarrow{AB} (-6; -5; 6);$$

$$\overrightarrow{AC} (3 - 2; 1 - (-3); -2 - (-1)) = \overrightarrow{AC} (1; 4; -1);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{97}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

**Відповідь:**  $\overrightarrow{AB} (-6; -5; 6), \overrightarrow{AC} (1; 4; -1), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{97}, |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}$ .

**Приклад 3..** Задано вектори  $\vec{a}(3; -2; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 1; 2)$ ,  $\vec{c}(-3; 2; 4)$ .

Знайдіть координати векторів  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{r} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ .

**Розв'язання:**

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} = (3+1; -2+1; 1+2); \vec{p} = (4; -1; 3);$$

$$\vec{q} = \vec{a} - \vec{b} = (3-1; -2-1; 1-2); \vec{q} = (2; -3; -1);$$

$$2\vec{a}(3 \cdot 2; -2 \cdot 2; 1 \cdot 2) = (6; -4; 2);$$

$$3\vec{b}(1 \cdot 3; 1 \cdot 3; 2 \cdot 3) = (3; 3; 6);$$

$$\vec{r} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (6+3-(-3); -4+3-2; 4+6-4) = (12; -3; 4).$$

**Відповідь:**  $\vec{p} = (4; -1; 3)$ ,  $\vec{q} = (2; -3; -1)$ ,  $\vec{r} = (12; -3; 4)$ .

**Приклад 4.** При якому значенні  $p$  вектори  $\vec{a}(3; p; -1)$  і  $\vec{b}(p; -2; 5)$

взаємно перпендикулярні?

**Розв'язання:** Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot p + p \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = p - 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ тоді } p - 5 = 0. \text{ Звідси } p = 5.$$

**Відповідь:**  $p = 5$

**Приклад 5.** Знайдіть кут між векторами  $\vec{a}(1; 2; -3)$  і  $\vec{b}(2; -1; -4)$ .

**Розв'язання:** Скористаємося формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) = 12$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\text{Тоді } \cos \varphi = \frac{12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\text{Звідси } \varphi = \arccos \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

$$\text{Відповідь: } \varphi = \arccos \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

### *Завдання для самостійної роботи*

Дано 4 точки A, B, C, D

Знайти:

1.  $\left(3\vec{AB} + 2\vec{CD}\right) \bullet \left(5\vec{AB} - 4\vec{CD}\right);$
2. Кут між діагоналями чотирикутника;
3. Відстань від середини відрізка AB до початку координат;
4. Периметр та площу трикутника ABC;
5. Розкласти вектор  $7\vec{AC} - 2\vec{BD}$  на складові.

1. A (-7; 7; -3); B( 6; -5; 8); C( -3; -5; 8); D( 8; 4; 1).
2. A(8; -6; 4), B (-10; 5; -5), C(5; -6; 8); D(8; 10; -7).
3. A(7; -2; -2); B(5; 7; 7); C(-5; 3; 1); D(-2; 3; 7).
4. A(6; -6; 5), B(-4; 9; 5), C(4; -6; 11), D(6; 9; -3).
5. A(-1; 0; -3); B( 1; -5; 2); C( -3; 4; 8); D( 1; 1; 1).
6. A(8; -1; 4), B (-1; 5; 5), C(5; 6; 0); D(8; 4; -4).
7. A(7; -5; -2); B(0; 7; 1); C(-1; 3; 1); D(-5; 3; 3).
8. A(6; 0 5), B(-4; 9; 0), C(4; 1; 1), D(6; 0; -3).
9. A(7; 7; 0); B( -6; -5; -8); C( -3; 0; 8); D( 0; -4; 1).
10. A(8; 1; 4), B(-11; 5; 5), C(0; -6; 0); D(8; 2; 3).
11. A(7; 3; 0); B(5; 7; 0); C(-1; 3; 1); D(-2; 3; 1).
12. A(6; -4; 5), B(-4; 4; 5), C(4; -6; 3), D(6; 0; -3).
13. A(-1; 1; -3); B( 6; -5; 3); C( -3; -5; 2); D( 1; 4; 1).
14. A(8; -5; 4), B (-3; 5; -1), C(5; 0; 8); D(8; 0; -7).
15. A(7; -2; -2); B(5; 2; 7); C(-1; 3; 1); D(-2; 3; 6).
16. A(1; -6; 5), B(-4; 1; 5), C(4; -6; 1), D(6; 1; -3).
17. A(-7; 3; -3); B( 6; -5; 4); C( -3; -5; 1); D( 5; 4; 1).
18. A(1; -6; 4), B (0; 5; -5), C(5; -6; 4); D(8; 2; -7).
19. A(7; -2; 0); B(5; 7; 0); C(-3; 3; 1); D(-2; 3; 5).
20. A(4; -6; 5), B(-4; 5; 5), C(4; -6; 6), D(6; 9; -3).

#### 4 Дії над комплексними числами в показниковій формі.

Розглядаючи функцію  $y = e^x$  для комплексного змінного, відомий математик Л. Ейлер встановив співвідношення  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ .

З даної формули слідує, що кожне комплексне число  $z \neq 0$  можна записати у вигляді,

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi}$ , який називають **показниковою формою запису**.

Над комплексними числами в показниковій формі виконують такі ж дії як і в тригонометричній формі. Виведення формул, за якими виконують дії ґрунтується на основних властивостях степеня.

Нехай  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$   $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , тоді:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

**Приклад 1.** Представити число  $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$  в алгебраїчній формі.

**Розв'язання:** Згідно умови задачі  $r = 4$ ;  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ , тому

$$a = 4 \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2\sqrt{3}$$

$$b = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

$$\text{значить } 4e^{i\frac{5\pi}{6}} = -2\sqrt{3} + 2i$$

**Відповідь:**  $-2\sqrt{3} + 2i$

**Приклад 2.** Виконати дії, результат записати в тригонометричній та показниковій формах  $z = 10 \left( \frac{i+1}{2-i} + \frac{i-1}{4+2i} \right)$

**Розв'язання:** Спочатку виконаємо дії:

$$1. \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{2^2+i^2} = \frac{1+3i}{5}$$

$$2. \frac{1-i}{4+2i} = \frac{(1-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{4-4i-2i+2i^2}{4^2+2^2} = \frac{2-6i}{20}$$

$$3. \frac{1+3i}{5} + \frac{2-6i}{20} = \frac{4+12i+2-6i}{20} = \frac{6+6i}{20} = \frac{3+3i}{10}$$

$$4. 10 \cdot \frac{3+3i}{10} = 3+3i$$

Тепер отримане число запишемо в тригонометричній та показниковій

формах. Для цього знайдемо модуль та аргумент:

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\varphi = \alpha = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

Тоді

$$z = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad z = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Відповідь: } z = 3 + 3i; \quad z = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad z = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

### ***Завдання для самостійної роботи***

**1.** Виконати дії, відповідь записати в трьох формах.

1.  $4(\cos 220^\circ + i \sin 220^\circ) \cdot 1,5(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$
2.  $5(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ) \cdot 4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
3.  $3(\cos 280^\circ + i \sin 280^\circ)^{3/4} \cdot (\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$
4.  $6(\cos 380^\circ + i \sin 380^\circ) : 2(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$
5.  $2(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ) \cdot 5(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$
6.  $3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \cdot (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
7.  $3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$
8.  $2(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ) \cdot (\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$
9.  $(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ) \cdot (\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ)$
10.  $(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ) \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
11.  $5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
12.  $3(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ) \cdot (\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)$
13.  $2(\cos 42^\circ + i \sin 42^\circ) \cdot (\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$
14.  $5(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \cdot (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
15.  $5(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ) \cdot (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$
16.  $5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
17.  $5(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot (\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$
18.  $5(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ) \cdot (\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$
19.  $2E^{7\pi/4 \cdot i} \cdot E^{\pi/4 \cdot i}$
20.  $6E^{2\pi \cdot i} \cdot 3E^{\pi/3 \cdot i}$
21.  $2E^{4\pi/3 \cdot i} : 4E^{2\pi/3 \cdot i}$
22.  $4E^{11\pi/6 \cdot i} : 2E^{7\pi/6 \cdot i}$
23.  $(4+4i)(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
24.  $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)(-3+i\sqrt{3})$
25.  $(1-\sqrt{3}i)(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
26.  $(-2-2i) : 2E^{\pi/3 \cdot i}$
27.  $(-4+4i) 3E^{-\pi/6 \cdot i}$
28.  $3E^{\pi/3 \cdot i} : (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$
29.  $(2+2\sqrt{3}i)(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
30.  $(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) 3E^{\pi/12 \cdot i}$

### ***Теми для реферату:***

Застосування комплексних чисел в електротехнічних розрахунках.

### Запитання для самоперевірки

1. Що ми називаємо розв'язком системи 3 лінійних рівнянь з 3 невідомими?
2. В чому полягає метод Гауса?
3. Запишіть формули Крамера для розв'язання системи 3 лінійних рівнянь з 3 невідомими?
4. Коли система не має розв'язків?
5. Що ми називаємо скалярним добутком векторів?
6. Назвіть умову колінеарності векторів.
7. Назвіть умову перпендикулярності векторів.
8. Назвіть формулу для обчислення кута між векторами.
9. Як записати комплексне число в показниковій формі?
10. Як можна геометрично інтерпретувати комплексні числа?
11. Як виконати дії з комплексними числами в показниковій формі ?

## Модуль 2:Застосування похідної та інтеграла

### Теми, які виносяться на самостійне вивчення

#### 1.Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Границя функції при $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Означення:** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то функція  $f(x)$  називається *нескінченно великою* при  $x \rightarrow a$ .

Якщо ж  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , то функція  $f(x)$  називається *нескінченно малою* при  $x \rightarrow a$ .

Аналогічно визначаються нескінченно великі і нескінченно малі функції при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

Зауважимо, що має місце наступне твердження: якщо функція  $f(x)$  – нескінченно мала при  $x \rightarrow a$  і  $f(x) \neq 0$  для  $x \neq a$  з деякого околу точки  $a$ , то функція  $\frac{1}{f(x)}$  - нескінченно велика при  $x \rightarrow a$ .

Наприклад, функція  $f(x) = x$  є нескінченно мала при  $x \rightarrow 0$  і нескінченно велика при  $x \rightarrow -\infty$  і при  $x \rightarrow +\infty$ .

Функція  $f(x) = \frac{1}{x}$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow +\infty$  і при  $x \rightarrow -\infty$  і нескінченно великою при  $x \rightarrow 0$  (аналогічно при  $x \rightarrow +0$  і при  $x \rightarrow -0$ ).

#### *Границя функції при $x \rightarrow \pm\infty$ .*

Нехай функція  $f(x)$  визначена на всій числовій прямій. Число  $B$

називається *границею функції*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$  для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

В цьому випадку пишуть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$ . Аналогічно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = C$  для будь-якої  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ .

Крім розглянутого випадку скінченної границі функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  (або  $x \rightarrow \pm\infty$ ) використовується поняття нескінченної границі. Наприклад, функція  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , визначена для всіх  $x \neq 0$ , приймає дуже великі значення при  $x \rightarrow 0$ . В такому випадку говорять, що функція в точці  $x = 0$  має свою границею нескінченність, і пишуть  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ .

Запишемо означення нескінченної границі: якщо для будь-якої послідовності значень аргументу  $(x_n)$  такої, що  $x_n \neq a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  має місце  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ , то кажуть, що *границя функції*  $f(x)$  в точці  $a$  є нескінченність пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Якщо в даному означенні умову  $x_n \neq a$  замінити на умову  $x_n < a$  (або  $x_n > a$ ), то отримаємо означення нескінченної лівої границі (відповідно правої границі) функції  $f(x)$  в точці  $a$ .

Аналогічно визначаються нескінченні границі на нескінченності, тобто границі виду  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ .

**Приклад 1.** Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 4}{14 - x^2 - x^3}$ .

Разділимо чисельник і знаменник на  $x^3$ , тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 4}{14 - x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{14}{x^3} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{3}{-1} = -3.$$

**Зауваження.** В прикладах при  $x \rightarrow +\infty$  чисельник і знаменник прямують до нескінченності. В таких випадках кажуть, що маємо неозначеність виду  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Приклад 2.** Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

**Зауваження** В прикладі 2 розглянуто неозначеність виду  $\infty - \infty$ .

### Завдання для самостійної роботи

Обчислити границі.

1.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-3x}{2x+3}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2-5x-6}{7x^2-8x-9}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x^3-2x^2-3x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^2+5}{4x^2-9}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-8}{3-x+10x^2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+5x-2}{3-2x^2+6x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-3-x^2}{2x^2+5x+1}$
8.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+2)^2}{1-x^2}$
9.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{2x-5x^3}$
10.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2+2x-3}{x^2-4x-21}$
11.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+x^2-11}{5x-8x^2+10x^3}$
12.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-6x-16}{x^2+x-2}$
13.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^2-(x+2)^2}{5x-1}$
14.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+8}{x+3}$
15.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-8}{3-x+10x^2}$
16.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}-x}{4x+11}$
17.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2+2x+7}{x^2-3x-5}$
18.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+3)^2}{2x^2+3x-1}$
19.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-5x+2x^2}{2x+8x^2}$
20.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2+3}{4x^2+5}$

## 2. Диференціювання функцій заданих неявно та параметрично. Обчислення похідних.

*Диференціювання функцій заданих неявно*

Якщо функція  $y=y(x)$  задана рівнянням, з якого неможливо явно виразити  $y$ , то для знаходження похідної  $y'$  потрібно продиференціювати по  $x$  обидві частини цього рівняння, пам'ятаючи, що  $y$  є функція від  $x$ , дали розв'язати рівняння відносно  $y'$ .

**Приклад:** Знайти похідну  $Y^3-3y+3x=1$

**Розв'язання:**

$$(Y^3-3y+3x)' = 1'$$

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0$$

$$y^2 y' - y' + 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{1-y^2}.$$

*Диференціювання функції, яка задана параметрично.*

Нехай функцію задано у параметричному вигляді:

$$y = \psi(t), \quad x = \varphi(t), \quad \text{де } t - \text{параметр.}$$

Функції  $\psi(t)$  і  $\varphi(t)$  - неперервні і диференційовані, коли  $t \in (\alpha; \beta)$ .

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad - \text{ похідна функції, заданої параметрично}$$

Або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

**Приклад:** Знайти  $y'_x(1)$ , якщо  $x = t e^{t^2}$ ,  $y = \ln t + t^{t^2}$

**Розв'язання:**

$$y'_t = \frac{1}{t} + t^3 t^{t^3-1} + t^{t^3} \ln t \cdot 3t^2, \quad y'(1) = 2$$

$$x'_t = e^{t^2} + t e^{t^2} 2t, \quad x'(1) = 3e \neq 0$$

$$y'_x(1) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \frac{2}{3e}$$

### Завдання для самостійної роботи

#### 1. Знайти похідну функції, яка задана неявно

1.  $3x - 7y + 15 = 8$

2.  $x^2 + y^2 + 2y = 0$

3.  $xy = x^2 + y$

4.  $\arctg(x+y) = x$

5.  $x^2 + y^3 = 1$

6.  $x = e^x + e^y$

7.  $y = 2x + y^2 - x^3$

8.  $\ln y + \frac{y}{x} = 0$

9.  $\sqrt[3]{x+y} = 5$

10.  $5^x + 5^y = 5^{x+y}$

11.  $x = \ln xy$

12.  $xy - \arctg x - \arctg y = 0$

13.  $5x - 7y^2 + 15 = x$

14.  $x^3 + y^2 + 2y = 0$

15.  $5xy = \ctg y$

16.  $\arctg(x+y) = x^2$

17.  $3x^2 + y^3 = 1$

18.  $3x = e^{x+y}$

19.  $y = 2x^3 + \arctg y$

20.  $\ln y + \frac{y}{x} = y$

21.  $\sqrt[3]{x+y} = x$

22.  $6^x + 6^y = 6^{x+y}$

23.  $3x = \ln xy$

24.  $y \arctg x - \arctg y = 0$

25.  $6x - 6y + 15 = y$

26.  $x^2 + y^2 + 2yx = 0$

27.  $3xy = y^2 + x^3$

28.  $\arctg(x+y) = xy$

29.  $x^2 + y^3 = y$

30.  $y x = e^{x+y}$

#### 2. Знайти похідну функції що задана параметрично:

1.  $\begin{cases} x = a \cos 3t \\ y = a \sin 3t \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x = \frac{3t^2}{1+t^3} \\ y = \frac{3t}{1+t^3} \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases}$

4.  $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^t \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$

6.  $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$

7.  $\begin{cases} x = 2 \cos t + \sin t \\ y = 5 \sin t - 4 \cos t \end{cases}$

8.  $\begin{cases} x = 4 \sin^3 t \\ y = 4 \cos^3 t \end{cases}$

9.  $\begin{cases} x = 1 + e^{2t} \\ y = 1 - e^{2t} \end{cases}$

10.  $\begin{cases} x = 4 \sin^2 t \\ y = 4 \cos^2 t \end{cases}$

11.  $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t \\ y = 5 \sin^3 t \end{cases}$

12.  $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^3 + 2 \end{cases}$

13.  $\begin{cases} x = 5e^t \\ y = 5e^{-t} \end{cases}$

$$14. \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = t^2 - 6 \\ y = t^3 + 4t \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = t + t^3 \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = 5 + 2e^t \\ y = 5 - e^{-t} \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = 1 - e^t \\ y = 2 - e^t \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = 3\cos t + 3\sin t \\ y = 3\sin t - 3\cos t \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = t^3 + 5 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = 6 + t^3 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = 5\sin^2 t \\ y = 5\cos^2 t \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin t - \cos t \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = \frac{3t^2}{1+t^3} \\ y = \frac{3t}{1+t^3} \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = 7 + e^t \\ y = 3 + e^{-t} \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x = 2t + \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x = 2\cos t + \sin t \\ y = \sin t - 3\cos t \end{cases}$$

### 3. Друга похідна, її фізичний зміст. Похідні вищих порядків

Похідна  $y' = f'(x)$  від функції  $y = f(x)$  називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку  $(y')'$  називається похідною *другого порядку від функції*  $y = f(x)$  і позначається  $y''$ ,  $f''(x)$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

Похідна від похідної другого порядку  $(y'')'$  називається *похідною третього порядку* і означається  $y'''$ ,  $f'''(x)$ ,  $\frac{d^3 x}{dx^3}$ .

Похідна від похідної  $(n-1)$ -го порядку  $(y^{(n-1)})'$  називається *похідною  $n$ -го порядку* і позначається  $y^{(n)}$ ,  $f^{(n)}(x)$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$ .

Таким чином,  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Фізичний зміст другої похідної**-це прискорення зміни функції по відношенню до аргументу.

**Приклад 1:** Знайти похідну третього порядку для функції  $y = \sin(5x + 4)$ .

**Розв'язання:**

$$y' = 5\cos(5x + 4); \quad y'' = -25\sin(5x + 4); \quad y''' = -125\cos(5x + 4).$$

**Відповідь:**  $y''' = -125\cos(5x + 4)$

**Приклад 2:** Знайти другу похідну функції  $f(x) = e^{\sin x}$

**Розв'язання:** спочатку знайдемо першу похідну

$$f'(x) = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$$

Якщо про диференціювати іще раз, знайдемо другу похідну

$$f''(x) = e^{\sin x} (\cos x)' + (e^{\sin x})' \cos x = e^{\sin x} (-\sin x) + e^{\sin x} \cos x \cdot \cos x = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$$

**Відповідь:**  $f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$

**Приклад 3:** Знайти похідні першого, другого і третього порядку функції

$$f(x) = e^x \cdot \sin x.$$

Розв'язання:

Використовуючи правила диференціювання добутку і суми функцій, послідовно знаходимо:

$$f'(x) = (e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' =$$

$$= e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = ((e^x \cdot \sin x)')' = (e^x (\sin x + \cos x))' = e^x (\sin x + \cos x) +$$

$$+ e^x (-\sin x + \cos x) = 2e^x \cdot \cos x$$

$$f'''(x) = (((e^x \cdot \sin x)')')' = (2e^x \cos x)' = 2(e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x) =$$

$$= 2e^x (\cos x - \sin x)$$

**Відповідь:**  $f'(x) = e^x (\sin x + \cos x)$

$$f''(x) = 2e^x \cdot \cos x$$

$$f'''(x) = 2e^x (\cos x - \sin x)$$

### *Завдання для самостійної роботи*

**Знайти похідну та обчислити її в точці:**

1.  $y = \frac{2}{(3x^2 - 5)}; y'(-1)$

2.  $y = \operatorname{Lntg} x - \frac{1}{2 \sin^2 x}; y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

3.  $y = e^{\sin^2 2x}; y'\left(\frac{\pi}{8}\right)$

4.  $S = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}}; S(2)$

5.  $y = x E^{x^2}; y(0)$

6.  $y = x \sqrt{1 + x^2}; y(\sqrt{3})$

7.  $y = x * \operatorname{Ln} x - x; y(E^3)$

8.  $S = \frac{1}{E^{2t}}; S'(0)$

9.  $S = \frac{5}{E^{2t}}; S'(0)$

10.  $y = \frac{2x}{3-x}; y'(2)$

11.  $y = \frac{E^x}{1+E^x}; y'(0)$

12.  $y = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x; y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

13.  $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + \varphi; y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

14.  $y = \frac{x}{1+x^2}; y'(2)$

15.  $S = \operatorname{Ln} \frac{x}{1-x^4}; S'(2)$

16.  $V = \sin^2 \varphi + \varphi; V'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

17.  $S = \operatorname{Ln} \frac{1+t}{1-t}; S'(3)$

18.  $y = \sqrt[3]{2t-t^2}; y'(4)$

19.  $y = \frac{1-t}{2t}; y'(0.5)$

20.  $y = 3 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x; y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

21.  $y = \frac{1}{x^3-1}; y'(-1)$

22.  $y = \frac{2}{\sqrt{t^2-8}}; y'(4)$

23.  $y = 4 \operatorname{tg} 2x - 5 \sin 4x; y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

24.  $y = x * \operatorname{Ln} x - x; y'(E)$

$$25. y = \frac{3-x}{x^2+5x-1}; y'(0)$$

$$26. S = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}; S(2)$$

$$27. y = e^{\sin 3x}; y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$28. y = \operatorname{Lntg} x + 2 \sin x; y'\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad 29. y = \operatorname{tg}^2 3x - \operatorname{ctg}^2 3x; y'\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad 30. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi; y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

#### **4. Диференціал функції та його застосування. Теорема про середнє.**

**Теорема Ферма.** Нехай функція  $y = f(x)$  є неперервною на інтервалі  $(a; b)$  і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці  $x = c \in (a; b)$ . Тоді якщо у цій точці існує похідна  $f'(c)$ , то  $f'(c) = 0$ .

Геометричний зміст теореми Ферма полягає у тому, що у точці  $x = c \in (a; b)$ , де функція  $y = f(x)$  набуває найбільшого чи найменшого значення на  $(a; b)$ , дотична до графіка цієї функції паралельна осі абсцис.

**Теорема Ролля.** Якщо функція  $y = f(x)$  є неперервною на відрізку  $[a; b]$ , диференційовною на проміжку  $(a; b)$  і на кінцях відрізка набуває однакових значень  $f(a) = f(b)$ , то знайдеться хоча б одна точка  $c \in (a; b)$ , у якій  $f'(c) = 0$ .

Отже, теорема Ролля стверджує, що на графіку функції, яка задовольняє умовам цієї теореми, знайдеться хоча б одна точка, дотична у якій паралельна осі  $Ox$ .

Якщо  $f(a) = f(b) = 0$ , то теорему Ролля можна сформулювати наступним чином: між двома коренями функції знаходиться хоча б один корінь її похідної.

**Приклад 1.** Довести, що рівняння  $3x^3 + 15x - 8 = 0$  має лише один дійсний корінь.

**Розв'язання.** Оскільки задане рівняння – це рівняння третього степеня (непарного), то воно має хоча б один дійсний корінь. Доведемо, що дійсний корінь цього рівняння лише один. Допустимо, що існують два таких корені –  $x_1$  та  $x_2$ , де  $x_1 < x_2$ . Тоді на відрізку  $[x_1; x_2]$  функція  $f(x) = 3x^3 + 15x - 8$  задовольняє всім умовам теореми Ролля: вона неперервна на цьому відрізку, диференційовна у кожній його внутрішній точці та приймає на кінцях цього відрізка однакові значення (дорівнює нулю). Отже, у деякій точці  $x_1 < c < x_2$   $f'(c) = 0$ . Проте  $f'(c) = 9x^2 + 15 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Отримане протиріччя доводить, що задане рівняння має єдиний дійсний корінь.

**Теорема Коші.** Якщо функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  неперервні на  $[a; b]$ , диференційовні у інтервалі  $(a; b)$ , причому  $\varphi'(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$ , то існує така точка  $c \in (a; b)$ , що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

**Теорема Лагранжа.** Якщо функція  $f(x)$  є неперервною на  $[a; b]$ , диференційовною у  $(a; b)$ , то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка  $c \in (a; b)$ , у якій виконується рівність:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ця рівність свідчить, що на графіку функції, яка задовольняє умовам теореми Лагранжа, знайдеться хоча б одна точка з абсцисою  $c$ , у якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає точки  $(a; f(a))$  та  $(b; f(b))$ .

Теорема Лагранжа має також механічну інтерпретацію. Якщо  $s = s(t)$ ,  $t \in [t_1; t_2]$  – закон руху матеріальної точки, то відношення  $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$  – це середня швидкість руху за проміжок часу  $[t_1; t_2]$ . Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу  $c \in (t_1; t_2)$  миттєва швидкість матеріальної точки неодмінно співпадає з її середньою швидкістю:  $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(c)$ .

З теореми Лагранжа випливають наступні наслідки.

**Наслідок 1.** Якщо похідна функції дорівнює нулю на деякому проміжку, то ця функція є сталою на даному проміжку.

**Наслідок 2.** Якщо похідні двох функцій співпадають на деякому проміжку, то ці функції відрізняються між собою на сталу величину.

Теорему Лагранжа та її наслідки можна застосовувати при доведенні тотожностей та нерівностей.

З поняттям похідної тісно пов'язане важливе поняття математики - поняття диференціалу.

Нехай дана функція  $y = f(x)$ , диференційована в точці  $x$ . Це означає, що існує  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

Отже, справедливе співвідношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \text{де } \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\text{Звідси: } \Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Як видно, приріст функції складається з двох доданків. Другий доданок  $\alpha \Delta x$ , як добуток нескінченно малих величин, є нескінченно мала більш високого порядку, ніж  $\Delta x$ . Значить, при малих  $\Delta x$  другий доданок менш важливий, ніж перший, і саме перший доданок складатиме основну частину приросту функції (головну частину).

**Диференціалом функції** в точці  $x$  називають головну частину

приросту функції  $\Delta y$  і позначають символом  $dy$ . За означенням  $dy = f'(x) \Delta x$ .

При  $f(x) = x$ , отримаємо,  $dx = 1 \cdot \Delta x$ , або  $dx = \Delta x$ , тобто диференціал аргументу рівний його приросту. Тоді  $dy = y' \Delta x = y' dx$  тобто диференціал функції  $y = f(x)$  в точці  $x$  дорівнює добутку похідної в цій точці на диференціал аргументу.

Звідси, і вираз, який ми раніше позначали одним символом,

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

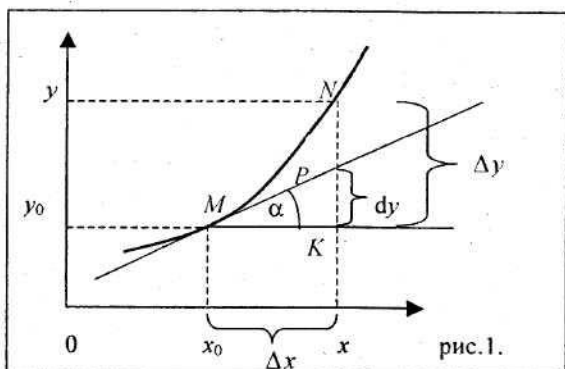
Тепер можна розглядати як дріб, рівний відношенню диференціалу функції до диференціалу аргументу.

Геометричний зміст диференціалу.

Розглянемо графік неперервної функції  $y=f(x)$  (рис 1)

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Похідна функції при  $x=x_0$  рівна тангенсу кута нахилу дотичної до графіку функції в точці з абсцисою  $x_0$ , тобто:



З рис. 1 видно, що дотична розбиває приріст функції  $KN$  на два відрізки:  $KP$ , який відповідає доданку  $y' \cdot \Delta x$  та  $PN$ , який рівний доданку  $\alpha \cdot \Delta x$ . Якщо приріст аргументу прямує до нуля, то відрізок  $PN$  зменшується значно швидше, ніж відрізок  $KP$ . Отже, приріст ординати дотичної  $KP$  є головною частиною приросту функції  $y=f(x)$ . З трикутника  $MPK$  знаходимо:

$$PK = MK \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тому, що  $MN = \Delta x$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = y'$ , отримаємо  $PK = y' \cdot \Delta x = dy$ .

Отже, диференціал функції  $y=f(x)$  геометрично зображується приростом ординати дотичної, проведеної в точці  $M(x_0, y_0)$  при заданих значеннях  $x_0$  і  $\Delta x$ .

**Приклад 1.** Знайти диференціал функції  $y = \ln x^2$ .

**Розв'язання:** Диференціал функції  $dy$  знаходимо як добуток першої похідної функції на диференціал незалежної змінної  $dx$ . За допомогою правила диференціювання складеної функції знаходимо похідну

$$y' = (\ln x^2)' = (\ln x^2)'_{x^2} \cdot (x^2)'_x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

Диференціал функції

$$dy = y' \cdot dx = \frac{2}{x} \cdot dx$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Приріст функції і диференціал функції відрізняються один від одного на малу величину  $\alpha \cdot \Delta x$ . Якщо знехтувати цією малою величиною, то отримаємо наближену рівність

$$\Delta y \approx dy,$$

тобто при малих приростах аргументу  $\Delta x$  приріст функції можна замінити її диференціалом.

Враховуючи, що  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , отримаємо  $f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$ ,

Звідки

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

Ці наближені рівності застосовуються для наближених обчислень, бо обчислення диференціалу функції значно простіше, ніж обчислення її приросту.

**Приклад 1.** Обчислити наближене значення приросту функції  $y = x^2 + 2x + 5$  при зміні аргументу від  $x=2$  до  $x=2,001$ .

**Розв'язання:** Знаходимо диференціал аргументу  $dx = \Delta x = 2,001 - 2 = 0,001$ . Приріст аргументу малий, тому приріст функції  $\Delta x$  наближено дорівнює його диференціалу  $dy$ .

Диференціал функції обчислюємо за формулою:  $dy = y'(x)dx$  Спочатку

$$dy = y'(x)dx.$$

знайдемо похідну функції і її значення при  $x = 2$ .

$$y' = 2x + 2,$$

$$y'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$dy = 6 \cdot 0,001 = 0,006;$$

$$\Delta y \approx 0,006$$

Тоді:

Точне значення приросту функції знайдемо за формулою:

$$\Delta y = f(2,001) - f(2),$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 13, \quad f(2,001) = (2,001)^2 + 2 \cdot 2,001 + 5 = 13,006001$$

$$\Delta y = 13,006001 - 13 = 0,006001$$

Тоді порівнюючи отриманий результат з диференціалом  $dy$ , бачимо, що абсолютна похибка дорівнює  $0,000\ 001$ . Проте абсолютна похибка не дає достатньо повної характеристики точності підрахунку, тому обчислимо і відносну похибку:

$$\omega = \frac{0,000001}{0,006001} < 0,02\%$$

Така точність майже завжди достатня для прикладних розрахунків, тому замість приросту функції знаходять її диференціал.

**Приклад 2.** Обчислити наближене значення функції:

$$\sqrt{16,06}$$

**Розв'язання:** Нам потрібно знайти наближене значення функції  $y = \sqrt{x}$  при  $x=16,06$

Знайдемо диференціал аргументу

$$dx = \Delta x = 16,06 - 16 = 0,06.$$

$$f(16,06) \approx f(16) + df, f(16) = \sqrt{16} = 4.$$

Диференціал знаходимо за формулою:  $df = f'(x)dx$ , для цього спочатку

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} = 0,125$$

знайдемо похідну функції і її значення при  $x=16$

$$\text{Тоді: } dy = 0,125 \cdot 0,06 = 0,0075$$

Звідси

$$\sqrt{16,06} \approx 4 + 0,0075 = 4,0075$$

### Завдання для самостійної роботи

Обчислити наближене значення виразу  $\sqrt[3]{26,9n}$ , де  $n$  - номер варіанту

### Теми для реферату

Використання похідної при дослідженні функцій та розв'язанні оптимізаційних задач.

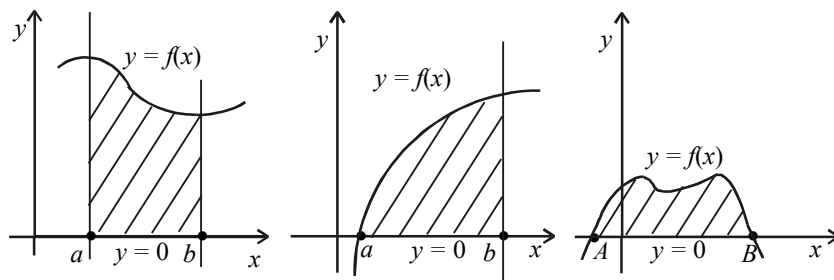
### Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення другої похідної функції
2. В чому полягає фізичний зміст другої похідної функції?
3. За яким правилом знаходять диференціал функції?
4. Як застосовують диференціал функції в наближених обчисленнях?

### 5. Розв'язування задач, які приводять до поняття визначеного інтеграла.

*Означення.* Криволінійною трапецією називається плоска фігура, що обмежена лініями:  $y = f(x) \geq 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .

На рис. зображені: класична криволінійна трапеція (а) та її вироджені випадки (б) та (в).



**Задача.** Обчислити площу криволінійної трапеції  $aABв$  (рис. 7.4).

*Розв'язання.*

Розіб'ємо проміжок  $[a; b]$  на  $n$  частин точками  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  так що  $a = x_0$ ,  $b = x_n$ .

Виберемо точки  $\xi_i$  так:  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ . Побудуємо прямокутники з основою  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  і висотою  $f(\xi_i)$  (рис. 1).

Площа елементарного прямокутника  $\Delta S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ . Площа ступінчастої фігури  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S_n$  буде тим менше відрізнятися від площі криволінійної трапеції  $S_{aABb}$ , чим менша довжина  $\max \Delta x_i$ , а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто  $S_{aABb} = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ .

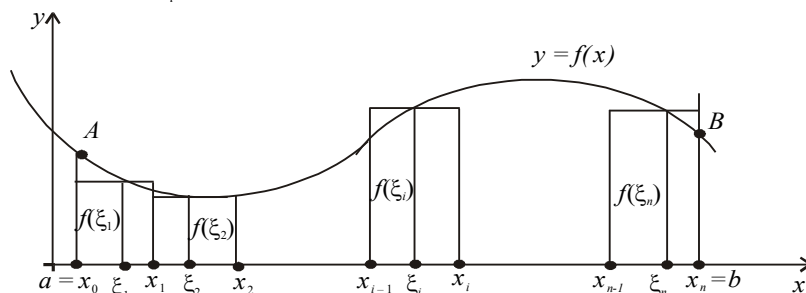


Рис. 1

**Задача.** Обчислити роботу змінної сили  $\vec{F} = \vec{e} \cdot f(x)$ ,  $|\vec{e}| = 1$ , що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку  $x \in [a; b]$  (рис. 2).

*Розв'язання.*

Розіб'ємо проміжок  $[a; b]$  на  $n$  частин точками  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . На кожному з відрізків  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  вважатимемо, що сила стала і дорівнює  $f(\xi_i)$ ,  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$  (рис. 2).

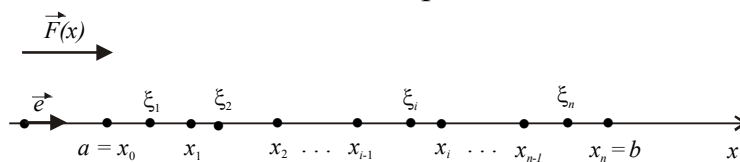


Рис. 2

Елементарна робота сили на відрізку  $\Delta x_i$  буде  $\Delta A_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ . Робота  $A$  сили  $\vec{F}$  на відрізку  $[a; b]$  знайдеться тоді так:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

*Означення.* Сума типу  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  називається *інтегральною сумою*.

Оперувати поняттям інтегральної суми доводиться у процесі розв'язку різних задач. Взагалі інтегральна сума може залежати від способу розбиття проміжка  $[a; b]$  на частини  $\Delta x_i$ , а також від вибору на них точок  $\xi_i$ .

### Поняття визначеного інтеграла

Нехай  $y = f(x)$  — деяка функція, що задана на проміжку  $[a; b]$ . Розіб'ємо  $[a; b]$  на  $n$  частин точками  $x_i$ , так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо  $f(\xi_i)$ , де  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Складемо інтегральну суму  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ .

Позначимо  $\lambda = \max \Delta x_i$ .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя інтегральних сум  $S_n$  при  $\lambda \rightarrow 0$  і не залежить ні від способу розбиття  $[a; b]$  на частини  $\Delta x_i$ , ні від вибору точок  $\xi_i$ , то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції  $f(x)$  на проміжку  $[a; b]$*  і позначається:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (7.8)$$

де  $\int_a^b$  — знак визначеного інтеграла;

$a, b$  — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$  — підінтегральна функція;

$f(x) dx$  — підінтегральний вираз;

$dx$  — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  — число, яке залежить від типу функції  $f(x)$  та проміжку  $[a; b]$ ; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ .

**Означення.** Функція, для якої на  $[a; b]$  існує визначений інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  називається *інтегрованою на цьому проміжку*.

### **6.Заміна змінної у визначеному інтегралі.**

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної виконується в такій послідовності:

1. ввести нову змінну;
2. знайти диференціал нової змінної;
3. знайти нові межі визначеного інтегралу;
4. весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну;
5. обчислити отриманий інтеграл.

**Приклад 1.** Обчислити інтеграл:  $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$ .

**Розв'язання:** Зробимо заміну  $8-x = t$ , тоді  $-dx = dt$ ,  $dx = -dt$ .  
Визначимо межі інтегрування для змінної  $t$ .

При  $x = 0$  отримаємо  $t_a = 8-0 = 8$ , при  $x=7$  отримаємо  $t_b = 8-7=1$ .

Виразимо підінтегральний вираз через  $t$  і  $dt$  та перейдемо до нових меж,  
Отримаємо:

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \int_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int_8^1 t^{-1/3} dt = \frac{t^{2/3}}{2/3} \Big|_1^8 = \frac{2}{3} \sqrt[3]{t^2} \Big|_1^8 = \frac{2}{3} (\sqrt[3]{64} - 1) = \frac{2}{3} (4 - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} = 4,5$$

**Відповідь:**  $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = 4,5$

**Приклад 2.** Обчислити інтеграл:  $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3 + 2)^2}$

**Розв'язання:** Вважатимемо. Що  $x^3 + 2 = t$ , тоді  $3x^2 dx = dt$ ,  $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ . Визначимо межі інтегрування для змінної  $t$ . При  $x = 1$ , отримаємо,  $t_n = 1^3 + 2 = 3$ ; при  $x = 2$  отримаємо  $t_b = 2^3 + 2 = 10$ .

Виразимо підінтегральний вираз через  $t$  і  $dt$ . та перейдемо до нових границь отримаємо:

$$\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3 + 2)^2} = \int_3^{10} \frac{\frac{1}{3} dt}{t^2} = \frac{1}{3} \int_3^{10} t^{-2} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_3^{10} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} \Big|_3^{10} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} \left( -\frac{7}{30} \right) = \frac{7}{90}.$$

**Відповідь:**  $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3 + 2)^2} = \frac{7}{90}.$

**Приклад 3.** Обчислити інтеграл:  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$ .

**Розв'язання:** Нехай  $\cos x = t$ , тоді  $-\sin x dx = dt$ ,  $\sin x dx = -dt$ . Визначимо границі інтегрування для змінної  $t$ :

$$t_n = \cos 0 = 1; \quad t_b = \cos(\pi/2) = 0.$$

Виразимо підінтегральний вираз через  $t$  і  $dt$ , та перейдемо до нових границь. отримаємо:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx = \int_1^0 \sqrt{t} (-dt) = -\int_1^0 t^{1/2} dt = \int_0^1 t^{1/2} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^1 = \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (1-0) = \frac{2}{3}.$$

**Відповідь:**  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx = \frac{2}{3}.$

**Приклад 4.** Обчислити інтеграл:  $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ .

**Розв'язання:** Спочатку перетворимо підінтегральний вираз:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x = \sin x - \cos^2 x \cdot \sin x$$

Обчислимо інтеграл від різниці функцій, замінивши його різницею визначених інтегралів від кожної функції:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -(0 - 1) = 1;$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = \int_1^0 t^2 (-dt) = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_1^0 = -\frac{1}{3} (0 - 1) = \frac{1}{3}, \text{ де } t = \cos x, dt = -\sin x dx.$$

$$\text{Тоді } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

### Завдання для самостійної роботи

$$1. \int_0^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$$

$$3. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x} \cdot \sin^2 x};$$

$$4. \int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cdot \sin 7x dx;$$

$$5. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x \cdot \cos 7x dx;$$

$$6. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 4x dx;$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \sqrt{3 \sin x + 1} \cdot \cos x dx;$$

$$8. \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} \cdot \sin x dx;$$

$$9. \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin x}{3 - \cos x} dx;$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \sin x};$$

$$11. \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin t dt}{1 + \cos t};$$

$$12. \int_0^{\pi/6} e^{\sin x} \cdot \cos x dx;$$

$$13. \int_0^1 e^{x^2} x dx;$$

$$14. \int_0^{\sqrt[3]{2}} 3e^{x^3} x^2 dx;$$

$$15. \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$16. \int_{\frac{1}{3}}^3 x e^{3x} dx;$$

$$17. \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$18. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^x}{x^2} dx;$$

$$19. \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{1 - 4x^3};$$

$$20. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}};$$

$$21. \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1 + 9^x};$$

$$22. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{5x} dx;$$

$$23. \int_{-\ln \sqrt{3}}^{\ln \sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$24. \int_0^{0,5} e^{\sin x} \cdot \cos x dx;$$

$$25. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$$

$$26. \int_0^{0,5} 5e^{\sin x} \cdot (-\cos) x dx;$$

$$27. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x})^3}{\cos^2 x} dx;$$

$$28. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx;$$

$$29. \int_{\frac{1}{3}}^3 3x e^{x^2} dx;$$

$$30. \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos x dx}{5 + \sin x};$$

## **7.Обчислення визначених інтегралів різними методами.**

### **Формула Ньютона—Лейбніца.**

Якщо функція  $f(x)$  визначена і неперервна на відрізку  $[a; b]$  і  $F(x)$ - її довільна первісна на цьому відрізку  $F'(x) = f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

### **Безпосереднє інтегрування .**

Під безпосереднім інтегруванням розуміють такий спосіб знаходження інтеграла , коли шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей визначеного інтеграла приходимо до одного чи декількох табличних інтегралів .

**Приклад 1.** Знайти інтеграл  $\int_1^3 \frac{3dx}{x^2}$

**Розв'язання.** використаємо властивості степеня з від'ємним показником

$$(a^{-m} = \frac{1}{a^m}; a > 0)$$

$$\int_1^3 \frac{3dx}{x^2} = 3 \int_1^3 x^{-2} dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^3 = -3x^{-1} \Big|_1^3 = -\frac{3}{x} \Big|_1^3 = -\frac{3}{3} - \left(-\frac{3}{1}\right) = 2$$

**Відповідь:**  $\int_1^3 \frac{3dx}{x^2} = 2$

**Приклад 2.** Знайти інтеграл  $\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$

**Розв'язання.**  $\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 1 + 1 = 2$

**Відповідь:**  $\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = 2$

### **Заміна змінної у визначеному інтегралі.**

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної виконується в такій послідовності:

1. ввести нову змінну;
2. знайти диференціал нової змінної;
3. знайти нові межі визначеного інтегралу;
4. весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну;
5. обчислити отриманий інтеграл.

**Приклад 3.** Обчислити інтеграл:

**Розв'язання.**  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int_2^3 \frac{2t dt}{t+1} = 2 \int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2(t - \ln|t+1|) \Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln \frac{3}{4}\right).$

### Метод інтегрування частинами.

Якщо функції  $u(x)$  і  $v(x)$  мають неперервні похідні на відрізку  $[a; b]$ , то справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Коротко цю формулу записують так:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1)$$

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

**Приклад 4:**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \left( \frac{x}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2} \left( x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \cos \pi \right) - \left( 0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{2} \cos 0 \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

### Завдання для самостійної роботи

**1. Обчислити визначені інтеграли (номер варіанту співпадає з номером по списку)**

- |                                                                  |                                                         |                                                             |                                      |
|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\int_0^2 (2-x)^2 dx$                                         | 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$                 | 3. $\int_0^4 (2\sqrt{x} - x^2) dx$                          | 4. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x} dx$    |
| 5. $\int_{-1}^1 (-x+5-3x^2) dx$                                  | 6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$          | 7. $\int_1^8 \left( 3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ | 8. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3} dx$     |
| 9. $\int_{-1}^1 (x^2-2) dx$                                      | 10. $\int_0^1 (e^x + x) dx$                             | 11. $\int_1^4 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$     | 12. $\int_{-2}^2 (1+x^2) dx$         |
| 13. $\int_1^8 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$                        | 14. $\int_{-1}^1 (1-\sqrt[3]{x^2}) dx$                  | 15. $\int_2^3 \frac{1+x^5}{x^4} dx$                         | 16. $\int_{-1}^0 (x^3+2x) dx$        |
| 17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 \cos^2 x}$               | 18. $\int_1^{16} (\sqrt{x}-2) dx$                       | 19. $\int_1^2 \frac{1+x^2}{x^6} dx$                         | 20. $\int_1^8 (1-4\sqrt[3]{x}) dx$   |
| 21. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3 \sin^2 x}$ | 22. $\int_1^4 \left( x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ | 23. $\int_1^2 \frac{1-x^6}{x^5} dx$                         | 24. $\int_0^4 (1-\sqrt{x})^2 dx$     |
| 25. $\int_0^8 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$       | 26. $\int_{-1}^1 (3-x+6x^2) dx$                         | 27. $\int_{-3}^3 (1+x)^2 dx$                                | 28. $\int_{-1}^1 (1+\sqrt{3x^2}) dx$ |

$$29. \int_0^1 (e^x + x^2) dx$$

$$30. \int_1^2 \frac{x-1}{2x^3} dx$$

### **8.Застосування інтеграла до рішення фізичних та технічних задач.**

Поняття визначеного інтеграла широко використовується для обчислення різних геометричних і фізичних величин.

#### **Обчислення площ плоских фігур.**

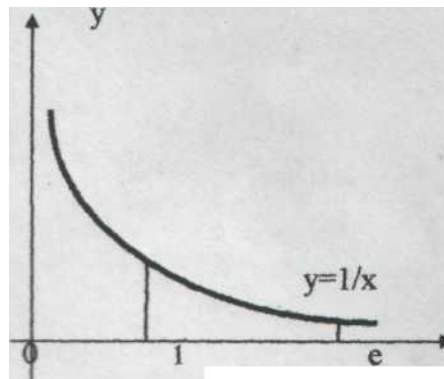
Площа криволінійної трапеції  $aABb$ , обмеженої графіком неперервної функції  $y = f(x)$  де  $(a \leq x \leq b)$ , відрізком  $ab$  осі  $Ox$  і відрізками прямих  $x = a$  і  $x = b$ , обчислюється за формулою:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

**Приклад 1.** Обчислити площу фігури, обмеженої гіперболою  $x \cdot y = 1$ , віссю  $Ox$  прямими  $x = 1$ ,  $x = e$  (мал. 1).

**Розв'язання.** Використовуючи формулу (1), отримаємо:

$$I = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1; \quad S = 1 \text{ кв. од.}$$



Мал.1

#### **Шлях, пройдений точкою.**

Якщо точка рухається прямолінійно і її швидкість  $V=f(t)$  є відома функція часу  $t$ , то шлях пройдений точкою за проміжок часу  $t_1 \leq t \leq t_2$ , обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

**Приклад 1.** Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю  $V = 0,1t^3$  ( $v$ - в м\с). Обчислити шлях, пройдений тілом за 10 с.

**Розв'язання.** Використовуючи формулу, знаходимо:

$$S = \int_0^{10} 0,1t^3 dt = \frac{1}{10} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^{10} = \frac{1}{40} \cdot 10^4 = 250(\text{м})$$

**Приклад 2.** Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, дорівнює :

$V = (4t - t^2)$  м/с. Обчислити шлях, пройдений тілом від початку руху до зупинки.

**Розв'язання.** У момент зупинки швидкість руху тіла дорівнює нулю, тобто:  $4t - t^2 = 0$ ,  $t(4 - t) = 0$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 4$ . Отже, тіло зупиниться через 4с. Шлях, пройдений тілом за цей час, обчислюємо за формулою :

$$S = \int_0^4 (4t - t^2) dt = 4 \int_0^4 t dt - \int_0^4 t^2 dt = 4 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^4 - \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^4 = 2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 64 = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} (\text{м})$$

### Робота сили.

Якщо змінна сила  $F = F(x)$  діє у напрямку осі  $Ox$ , то робота сили на відрізка  $a \leq x \leq b$  обчислюється за формулою:  $A = \int_a^b F(x) dx$  (1).

**Приклад 1.** Обчислити роботу, яку треба здійснити при стиску пружини на 0,08м, якщо для її стиску на 1см потрібна сила 10Н.

**Розв'язання.** Відповідно закону Гука, сила  $F$ , яка розтягає або стискає пружину на  $x$  метрів, дорівнює  $F = kx$ , де  $k$  - коефіцієнт пропорційності. З умови виходить  $10 = k \cdot 0,01$ , тобто  $k = 1000$  Н/м, отже  $F = kx = 1000x$ . Шукану роботу знаходимо за формулою (1):

$$A = \int_0^{0,08} 1000x dx = 1000 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,08} = 1000 \frac{0,0064}{2} = 3,2 (\text{Дж})$$

### Приклад 2.

Сила 196,2 Н розтягує пружину на 18см. Яку роботу вона виробляє?

**Розв'язання.** За законом Гука,  $F = kx$  звідки  $k = F/x = 196,2/0,18 = 1090$  (Н/м). Значить,  $F = 1090x$ . Знаходимо шукану роботу:

$$A = \int_0^{0,18} 1090x dx = 1090 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,18} = 545 \cdot 0,0324 \approx 17,7 (\text{Дж})$$

### Сила тиску рідини.

Сила тиску  $P$  рідини щільності  $S$  на вертикальному платівку, занурену у рідину,

$$\text{обчислюється за формулою: } P = \int_a^b g p S dx ,$$

де  $g = 9,81$  М/с<sup>2</sup> - прискорення вільного падання,  $S$  - площа платівки,  $x$  - глибина занурення змінюється від  $a$  до  $b$ .

**Приклад 1.** Обчислити силу тиску води на одну зі стінок акваріуму, довжина якого 30см і висота 20см.

**Розв'язання.** Стінка акваріуму має форму прямокутника, тому  $S = 0.3x$ , де  $0 \leq x \leq 0.2$ . Щільність води дорівнює  $1000$  кг/м<sup>3</sup>. Тоді сила тиску води на стінку акваріуму відповідно формули складає:

$$P = 1000 \cdot 9.81 \int_0^{0.2} 0.3x dx = 9810 \cdot 0.3 \cdot 0.2^2 = 11.772 \text{ (H)}$$

**Приклад 2.** Обчислити силу тиску бензину на стінки циліндричного бака висотою 3м і радіусом основи 1м.

**Розв'язання.** Площа поверхні стінки циліндричного бака  $S = 2\pi R x = 2\pi x$ , де  $0 \leq x \leq 3$ . Щільність бензину є  $800 \text{ кг/м}^3$ . Тоді сила тиску бензину на стінки бака складає:

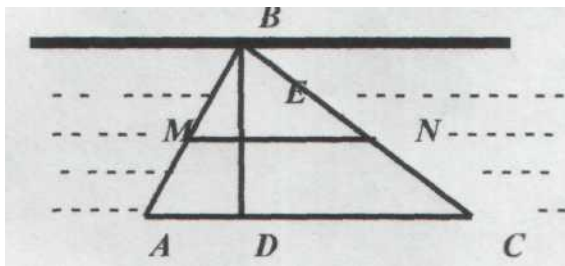
$$P = 800 \cdot 9.81 \int_0^3 2\pi x dx = 7848 \cdot \pi \cdot 9 \approx 22000 \text{ (H)}$$

**Приклад 3.** Обчислити силу тиску води на занурену до неї вертикальну платівку, маючу форму трикутника з основою 6м і висотою 2м, припускаючи, що вершина цього трикутника лежить на вільній поверхні води, а основа паралельно до неї. (див. мал.)

**Розв'язання.** Нехай MN- ширина платівки на рівні BE=X. З подібності трикутників ABC і MBN знаходимо

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD}, \text{ або } MN = \frac{AC \cdot BE}{BD} = \frac{6 \cdot x}{2} = 3x. \text{ На основі}$$

$$\text{формули отримаємо: } P = 1000 \cdot 9.81 \int_0^2 3x \cdot x dx = 9810 \cdot 8 = 78480 \text{ (H)}$$



### Завдання для самостійної роботи

Розв'яжіть задачі

1. Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від  $t_1 = 2c$  до  $t_2 = 3c$ , якщо воно рухається прямолінійно за швидкістю, яка законом  $v = 5t + 6 \text{ (м/с)}$ .
2. Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від  $t_1 = 1c$  до  $t_2 = 7c$ , якщо воно рухається прямолінійно за швидкістю, яка законом  $v = t + 1 \text{ (м/с)}$ .
3. Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від  $t_1 = 1c$  до  $t_2 = 3c$ , якщо воно рухається прямолінійно за швидкістю, яка законом  $v = t^2 + 2 \text{ (м/с)}$ .
4. Знайти силу струму у момент  $t = 2c$ , якщо через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики  $q = \sqrt{2+t}$ .
5. Знайти силу струму у момент  $t = 3c$ , якщо через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики  $q = \sqrt{3+t}$ .
6. Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від  $t_1 = 1c$  до  $t_2 = 3c$ , якщо воно рухається прямолінійно за швидкістю, яка законом  $v = 2t + 1 \text{ (м/с)}$ .
7. Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від  $t_1 = 1c$  до  $t_2 = 3c$ ,

якщо воно рухається прямолінійно за швидкістю, яка законом  $v = 4t + 5$  (м/с).

8. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною 4м, що має квадратний переріз із стороною 2м. Густина води  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$

9. Обчислити роботу, яку слід затратити, щоб розтягнути пружину 0,06м, якщо сила 12н розтягує її на 0,01м.

10. Обчислити роботу, яку треба затратити для стиснення пружини на 5 см, якщо сила 4н стискає цю пружину на 2см.

11. Швидкість руху точки  $V = (24t - 6t^2)$  м/с. Знайдіть шлях пройдений точкою за 3 с. від початку руху.

12 Швидкість руху точки  $V = (24t - 6t^2)$  м/с. Знайдіть шлях пройдений точкою за третю секунду.

13. Швидкість руху точки  $V = (24t - 6t^2)$  м/с. Знайдіть шлях пройдений точкою від початку руху до зупинки.

14. Обчислити роботу, яку треба затратити для стиснення пружини на 0,1 м, якщо сила 78н стискає цю пружину на 0,01м.

15. Обчислити роботу, яку треба затратити для стиснення пружини на 6 см, якщо сила 6 н стискає цю пружину на 2см.

### **9.Наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою ЕОМ.**

В тих випадках, коли обчислити визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца неможливо або важко, використовують методи наближеного інтегрування. При достатньо малому відрізку  $[a;b]$  площа  $S$  криволінійної трапеції наближено рівна площі прямокутника ( «лівого» прямокутника рис.4а, та «правого» прямокутника рис.4в), трапеції (рис.5) або параболи (рис.6)

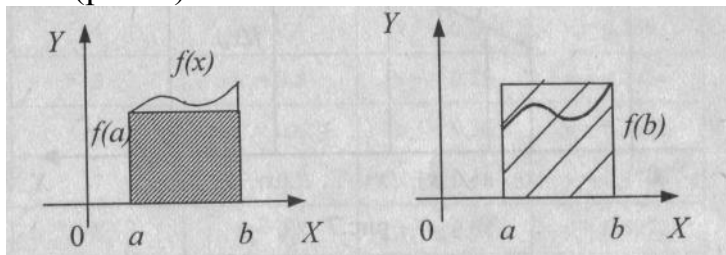


Рис.4а

Рис.4в

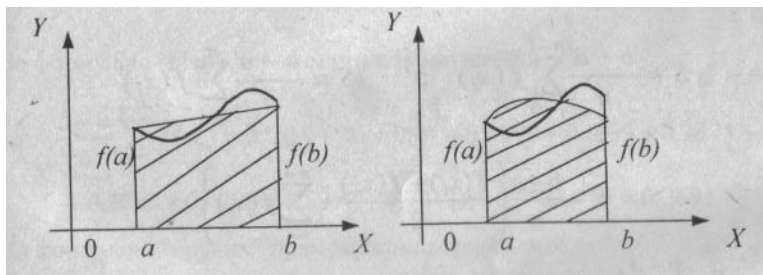


Рис.5

Рис. 6

Запишемо наступні наближені рівності:

$$S \approx (b-a) \cdot f(a) \quad \text{рис.4а;}$$

$$S \approx (b-a) \cdot f(b) \quad \text{рис.4в}$$

$$S \approx (b-a) \left( \frac{f(b) + f(a)}{2} \right) \text{ (рис.5);}$$

$$S \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \text{ (рис.6).}$$

Щоб добитися більшої точності при знаходженні площі  $S$ , проміжок від  $a$  до  $b$  розбивають на  $n$  рівних частин (рис. 7) (при наближенні параболами проміжок розбивають на  $2n$  частин).

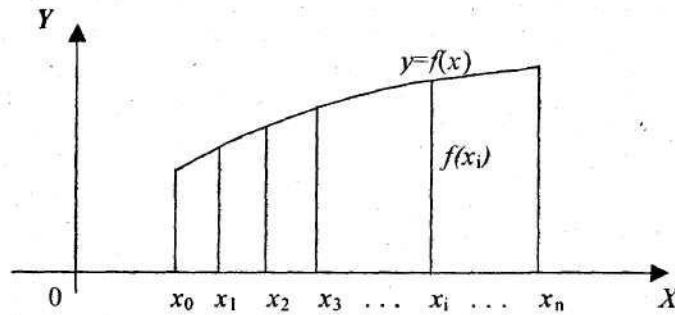


Рис. 7

Якщо для кожної із маленьких дуг використати попередні наближення, то для всієї площі  $S$  отримаємо наближене значення представлене у вигляді суми площ криволінійних трапецій

$$S \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) ; \quad S \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) ;$$

$$S \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) ;$$

$$S \approx \frac{b-a}{2} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}))$$

Перші дві формули носять назви формул "лівих" та "правих" прямокутників відповідно, третя - формули трапеції, а остання - формули Сімпсона.

### **Наближене обчислення визначеного інтеграла за допомогою ЕОМ.**

Наближені обчислення визначеного інтеграла можна проводити за допомогою електронної таблиці Excel

**Приклад:** Протабулювати функцію  $y = (\sin x^2 + 1)$  та обчислити площу під кривою методом лівих прямокутників. Відрізок, на якому розглядати функцію, і крок табулювання  $H$  задати самостійно (у таблиці повинно бути 10-12 рядків)

|    | A                                             | B    | C     | D   | E | F |
|----|-----------------------------------------------|------|-------|-----|---|---|
| 1  | Таблювання функції та обчислення              |      |       |     |   |   |
| 2  | площі під кривою                              |      |       |     |   |   |
| 3  | $y = \sin(x^2) + 1, 0 \leq x \leq 5, h = 0,5$ |      |       |     |   |   |
| 4  |                                               |      |       | 0,5 |   |   |
| 5  | x                                             | y    | Площа |     |   |   |
| 6  | 0                                             | 1,00 | 0,500 |     |   |   |
| 7  | 0,5                                           | 1,25 | 0,624 |     |   |   |
| 8  | 1                                             | 1,84 | 0,921 |     |   |   |
| 9  | 1,5                                           | 1,78 | 0,889 |     |   |   |
| 10 | 2                                             | 0,24 | 0,122 |     |   |   |
| 11 | 2,5                                           | 0,97 | 0,483 |     |   |   |
| 12 | 3                                             | 1,41 | 0,706 |     |   |   |
| 13 | 3,5                                           | 0,69 | 0,344 |     |   |   |
| 14 | 4                                             | 0,71 | 0,356 |     |   |   |
| 15 | 4,5                                           | 1,99 | 0,993 |     |   |   |
| 16 | 5                                             | 0,87 |       |     |   |   |
| 17 |                                               |      | 5,938 |     |   |   |

**Вводимо вхідні дані розв'язування задачі так:**

| Адреси | Дані                                          |
|--------|-----------------------------------------------|
| A1     | Таблювання функції та обчислення              |
| A2     | площі під кривою                              |
| A3     | <тут бажано вказати свою функцію, межі, крок> |
| A5     | x                                             |
| B5     | y                                             |
| C5     | Площа .                                       |

**Задамо режим «Допускати назви діапазонів».**

Сервіс => Параметри => Закладка Обчислення.

**Вводимо у клітинку D4 значення кроку і дамо клітинці ім'я Н.** Введіть число і виберіть цю клітинку. Застосуйте команду Вставити => Ім'я => Присвоїти => Введіть Н => Додати => ОК.

**Вводимо формули розв'язування задачі так :**

| Адреси | Формули            | Примітки                                   |
|--------|--------------------|--------------------------------------------|
| A6     | 0                  | Значення лівої межі задайте своє           |
| B6     | $= (\sin x^2 + 1)$ | Це формула обчислення значення функції     |
| C6     | $= H * y$          | Обчислено площу одного лівого прямокутника |
| A7     | $= A6 + H$         |                                            |

**Скопіюємо формули з клітинок A7, B6, C7 вниз до кінця робочої таблиці — отримаємо площі всіх лівих прямокутників у стовпці C.**

**У стовпці C вилучіть останнє значення.**

**Щоб отримати площу під всією кривою, обчисліть суму площ всіх лівих прямокутників.**

Клацніть під стовпцем C і застосуйте команду кнопку Авто Сума. Яке значення площі отримано?

Для отримання точнішого значення площі значення кроку  $H$  потрібно зменшувати. Уменшіть значення  $H$  удвічі й обчисліть площу під кривою на тому ж самому проміжку.

### ***Завдання для самостійної роботи***

Протабулювати функцію  $y=n(\cos nx^3+5)$ , де  $n$ - номер варіанту і обчислити площу під кривою методом лівих прямокутників на відрізьку  $[0;6]$  і  $H=0,3$

### ***Питання для самоперевірки***

1. Дайте означення визначеного інтегралу
2. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?
3. Назвіть методи обчислення визначених інтегралів.
4. Напишіть формулу для обчислення шляху, пройденого тілом
5. Напишіть формулу для обчислення роботи змінної сили
6. За якою формулою обчислюється сила тиску рідини на пластинку
7. Які ви знаєте наближені методи обчислення визначених інтегралів?

### **10.Диференціальні моделі процесів зростання та вирівнювання. Нескладні задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь.**

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію з рівняння, яке містить поряд з цією невідомою функцією її похідні.

Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається **диференціальним**

Порядок найвищої похідної, яка входить до диференціального рівняння, називається його порядком. Наприклад, рівняння  $y'' + 4y = 0$  є диференціальним рівнянням другого порядку.

Якщо до рівняння входить незалежна змінна, невідома функція та її похідна, то це рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо, крім того, в рівняння входить похідна другого порядку від шуканої функції, то рівняння називається диференціальним рівнянням другого порядку і т. д.

Будь-яку функцію, що задовольняє диференціальне рівняння, називають розв'язком, або інтегралом цього рівняння, а розв'язування диференціального рівняння — інтегруванням. Наприклад, функція  $y = e^x$  є розв'язком диференціального рівняння  $y - y' = 0$ , бо  $(e^x)' = e^x$ .

Функція  $y = \cos x$  є розв'язком диференціального рівняння  $y'' + y = 0$ .

Справді, для функції  $y = \cos x$ , маємо:  $y'' = -\cos x$ . Підставляючи значення  $y''$  і  $y$  у рівняння  $y'' + y = 0$ , дістанемо:  
 $-\cos x + \cos x = 0$ .

Аналогічно можна переконатися, що функція  $y = A \sin x + B \cos x$ , де  $A$  і  $B$  — довільні сталі, також є розв'язком даного рівняння.

Загальним розв'язком даного диференціального рівняння називається розв'язок (якщо він існує), у якого число довільних сталих дорівнює порядкові рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння при певних значеннях довільних сталих називається окремим розв'язком цього диференціального рівняння.

Так, у розглянутому вище прикладі  $y'' + y = 0$  розв'язок  $y = A \sin x + B \cos x$  є загальним, а розв'язок  $y = \cos x$  — окремим.

На практиці здебільшого окремий розв'язок конкретного диференціального рівняння знаходять із загального розв'язку, виходячи з деяких умов, яким має задовольняти шуканий окремий розв'язок. Умови, яким має задовольняти окремий розв'язок даного диференціального рівняння, називають початковими умовами.

Задача відшукування конкретного окремого розв'язку даного диференціального рівняння за початковими умовами називається задачею Коші.

Приклад. Знайти окремий розв'язок диференціального рівняння

$$yy' + x = 0, \quad (1)$$

яке задовольняє початковим умовам:  $y = 4$ ,  $x = 3$ , якщо загальний розв'язок даного рівняння задано у вигляді

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (2)$$

Розв'язання. Підставивши в загальний розв'язок (2) початкові умови, дістанемо значення довільної сталої  $3^2 + 4^2 = a^2$ . Звідси  $a = \pm 5$ . Отже, шуканий окремий розв'язок диференціального рівняння (1) для заданих початкових умов є функція  $y$ , задана рівнянням  $x^2 + y^2 = 25$ .

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку рівняння (1).

Оскільки кожний окремий розв'язок даного рівняння є деякою функцією однієї змінної, то в прямокутній системі координат на площині цьому розв'язку відповідає деяка лінія. Ця лінія називається інтегральною кривою даного диференціального рівняння. Загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає множина всіх інтегральних кривих цього рівняння, яка називається сім'єю інтегральних кривих диференціального рівняння.

Ми встановили, що окремим розв'язком рівняння  $yy' + x = 0$  при початкових умовах  $x = 3$  і  $y = 4$  є крива  $x^2 + y^2 = 25$ , а загальним розв'язком  $x^2 + y^2 = a^2$ .

У системі координат на площині загальний розв'язок рівняння задає множину концентричних кіл з центром у початку координат. Початкові умови означають, що серед цієї множини кіл треба взяти те, яке проходить через точку з координатами  $x = 3$ ,  $y = 4$ . Це коло з радіусом 5, тобто  $x^2 + y^2 = 25$ .

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь — складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв'язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію у вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. У цих

випадках знаходять наближені розв'язки за допомогою ЕОМ. Диференціальні рівняння досить просто і повно описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати.

Розглянемо деякі приклади.

**Приклад 1 (розмноження бактерій).** На дослідах встановлено, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості (якщо для них вистачає їжі).

Вважають, що з часом маса бактерій змінюється неперервно (бо самі бактерії дуже малі, а їх кількість велика).

Тоді швидкість приросту маси бактерій називається швидкістю розмноження. Нехай  $x(t)$  — маса всіх бактерій на момент часу  $t$ . Тоді  $x'(t)$  є швидкістю розмноження, яка пропорційна кількості бактерій. Існує таке  $k$ , що

$$x'(t) = kx. \quad (1)$$

За умовою,  $x(t)$  і  $x'(t)$  — невід'ємні. Розглянемо лише випадок, коли  $k > 0$ , бо якщо  $k = 0$ , то ніякого розмноження не відбувається.

Неважко перевірити, що будь-яка функція

$$x = Ce^{kt} \quad (2)$$

де  $C$  — деяка стала, є розв'язком рівняння (1).

Справді,

$$x'(t) = (Ce^{kt})' = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kx.$$

Функція  $x = Ce^{kt}$  є загальним розв'язком рівняння (1).

Коефіцієнт  $k$  залежить від виду бактерій і від зовнішніх умов. Якщо відомі значення коефіцієнта  $k$  і маса бактерій у деякий момент часу  $t_0$ , то за формулою (2) знайдемо масу бактерій у будь-який момент часу  $t$ .

Розв'язування багатьох задач у фізиці, техніці й біології, соціальних науках зводиться до математичної задачі знаходження функції  $f$ , яка задовольняє рівняння

$$f'(x) = kf(x) \quad (3)$$

де  $k$  — деяка константа.

За властивостями похідної показникової функції знаходимо, що розв'язком рівняння (1) буде будь-яка функція виду

$$F(x) = Ce^{kx}, \quad (4)$$

де  $C$  — стала. Оскільки  $C$  — довільне, то розв'язків диференціального рівняння (1) нескінченно багато. Доведено, що інших розв'язків, крім функцій виду (2), рівняння (1) не має.

### **Приклад 2 (рівняння механічного руху).**

Нехай матеріальна точка, маса якої дорівнює  $m$ , рухається під дією сили  $F$  уздовж осі  $Ox$ . Позначимо через  $t$  — час її руху,  $v$  — швидкість, а —

прискорення. Другий закон Ньютона  $a = \frac{F}{m}$  матиме вигляд диференціального рівняння, якщо записати прискорення як другу похідну:  $a = x''(t)$ .

Рівняння  $mx''(t) = F$  називають рівнянням механічного руху, де  $x(t)$  — невідома функція,  $m$  і  $F$  — відомі величини.

Залежно від умов задач по-різному записуються різні диференціальні рівняння. Наприклад:

а) сила  $F$  стала ( $F = \text{const}$ ), тоді рівняння руху має вигляд

$$x''(t) = \frac{F}{m} = a \text{ (де } a = \text{const});$$

б) сила періодично змінюється з часом, наприклад за законом  $F = F_0 \sin \omega t$ .

Тоді рівнянням руху є  $x''(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$ ;

в) сила пропорційна зміщенню (рух ідеально пружної пружини):  $F = -kx$ ,  $k > 0$  (знак «мінус» вказує на те, що напрям сили протилежний напрямку

зміщення). Маємо таке рівняння руху:  $x''(t) = -\frac{k}{m}x$

г) сила обернено пропорційна квадрату відстані (вільний політ). Тоді рівняння руху має вигляд  $x''(t) = -\frac{k}{x^2}$ .

### **Приклад 3 (диференціальне рівняння радіоактивного розпаду).**

Нехай у початковий момент часу маса радіоактивної речовини дорівнює  $m(0) = m_0$ . (5)

Відомо, що швидкість зменшення маси речовини  $m(t)$  з часом пропорційна її кількості, тобто виконується рівняння

$$m'(t) = -km(t), \text{ де } k > 0. \quad (6)$$

Скористаємося встановленою залежністю  $m(t) = Ce^{-kt}$ .

Константу  $C$  знаходимо з умови (5). Маємо:

$$m(0) = Ce^0, \text{ тобто } C = m(0) = m_0. \text{ Звідси } m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Нагадаємо, що інтервал часу  $T$ , протягом якого кількість радіоактивних ядер зменшується вдвічі, називають періодом напіврозпаду цієї речовини.

Отже,  $k$  і  $T$  пов'язані рівнянням

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}, \text{ з якого дістанемо: } e^{kT} = 2, kT = \ln 2, k = \frac{\ln 2}{T}. \text{ Для Радію } T \approx 1550$$

років, тому  $k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0.000447$ . Через мільйон років від початкової маси

Радію  $m_0$  залишиться  $m(10^6) = m_0 e^{-447} \approx 0,6 \cdot 10^{-194} m_0$ .

### **Приклад 4 (рівняння гармонічних коливань).**

Розглянемо рівняння

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (7)$$

де  $\omega$  — деяке додатне число.

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (8)$$

для будь-яких сталих  $A$  і  $\alpha$  є розв'язком рівняння (7). Можна показати, що інших розв'язків рівняння (7) не має. Таким чином, функція (8) задає загальний розв'язок рівняння (7).

Функція (8) для будь-яких заданих  $A$ ,  $\omega$  і  $\alpha$  описує гармонічний коливальний процес. Число  $|A|$  називається амплітудою, а число  $\alpha$  —

початковою фазою, або фазою коливання (8). Рівняння (7) називають рівнянням гармонічних коливань. Додатне число  $\omega$  називають частотою коливання.

Кількість коливань за одиницю часу визначають за формулою  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ .

Як бачимо, загальний розв'язок (8) рівняння (7) містить дві довільні сталі: амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\alpha$ . Для їх визначення слід задати дві умови, наприклад,

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \quad (9)$$

Тоді для визначення сталих  $A$  і  $\alpha$  дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} A \cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0, \\ -A \omega \sin(\omega t_0 + \alpha) = v_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{Звідси } A^2 \cos^2(\omega t_0 + \alpha) + A^2 \sin^2(\omega t_0 + \alpha) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

$$\text{Можна вважати, що } A > 0, \text{ тоді } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Знаючи амплітуду  $A$ , із системи (10) за формулами тригонометрії визначають початкову фазу  $\alpha$ .

З формули (8) можна дістати інший вигляд загального розв'язку рівняння (7).

Справді,  $x = A(\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) = A \cos \alpha \cos \omega t - A \sin \alpha \sin \omega t$ . Поклавши  $C_1 = A \cos \alpha$ ,  $C_2 = -A \sin \alpha$ , дістанемо:  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ .

До такого диференціального рівняння приводять, наприклад, дві різні, на перший погляд, задачі фізики — коливання пружної пружини і розрядження конденсатора через котушку.

Зазначимо, що рівняння гармонічних коливань розглянуто нами за умов, які реально не виконуються. Так, описуючи коливання пружини, треба враховувати тертя, а описуючи розрядження конденсатора — внутрішній опір. При цьому в рівнянні коливань з'являється доданок, що залежить від першої похідної (швидкості).

### **Завдання для самостійної роботи**

1. Перевірити, чи є розв'язком даного диференціального рівняння записана поряд з ними функція:

а)  $y'' + 2y' - xy = 0, y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ;

б)  $y'' - 2y' + y = 0, y = x^4$ .

2) Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $y' = 4 - 3x$

3.  $y' = 5e^{2x}$

2.  $y' = x^2 - 5x + 6$

4.  $y' = \cos x + \sin x$

$$5. y' = 5 \cos 3x$$

$$6. y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$7. y' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$8. y' = (2-x)^2$$

$$9. y' = (-x+5-3x^2)$$

$$10. y' = \sqrt{2} \cos x$$

$$11. y' = 2\sqrt{x} - x^2$$

$$12. y' = e^x + x$$

$$13. y' = \frac{x-1}{x^3}$$

$$14. y' = \frac{1}{3\sin^2 x}$$

$$15. y' = \frac{1+x^2}{x^6}$$

$$16. y' = (\sqrt{x}-2)$$

$$17. y' = e^x + x^2$$

$$18. y' = (1+x)^2$$

$$19. y' = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

$$20. y' = x^3 + 2x$$

$$21. y' = 3 - x + 6x^2$$

$$22. y' = 1 + \sqrt{3x^2}$$

$$23. y' = (2x+7-3x^2)$$

$$24. y' = (x+4-5x^2)$$

$$25. y' = 4e^x + 6x^2$$

$$26. y' = 2 \cos 7x$$

$$27. y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$28. y' = (2+3x)^2$$

$$29. y' = 7 \cos x + 2 \sin x$$

$$30. y' = 4 \cos x + \sin 2x$$

## 11.Розв'язування різних типів диференціальних рівнянь

**Приклад 1:** Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння  $y' = (2y+1) \operatorname{tg} x$ .

**Розв'язання:** Подамо дане рівняння в диференціалах

$$\frac{dy}{dx} = (2y+1) \operatorname{tg} x.$$

Для відокремлення змінних помножимо рівняння на множник  $\frac{dx}{2y+1}$  за умови, що  $2y+1 \neq 0$ ;  $y \neq -\frac{1}{2}$ .

Отримаємо рівняння  $\frac{dy}{2y+1} \operatorname{tg} x dx$ .

Змінні відокремлені, інтегруємо

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int \operatorname{tg} x dx; \quad \frac{1}{2} \ln|2y+1| = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\ln|2y+1| + 2\ln|\cos x| = C; \quad \ln|(2y+1)\cos^2 x| = C; \quad C = \text{const};$$

$$(2y+1)\cos^2 x = e^C; \quad 2y+1 = \frac{e^C}{\cos^2 x};$$

$$y = \frac{e^C}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}; \quad \bar{C} = e^C = \text{const}.$$

Перевіримо тип розв'язку для  $y = -\frac{1}{2}$ . Підставимо значення  $y$  до рівняння. Отримаємо

$$-\frac{1}{2} = \frac{e^C}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}; \quad \frac{e^C}{2\cos^2 x} = 0.$$

Даний розв'язок відповідає загальному розв'язку для  $C = 0$ . Отже,  $y = -\frac{1}{2}$  не є частинним розв'язком, входить до сім'ї інтегральних кривих загального розв'язку.

**Відповідь:**  $y = \frac{e^C}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}; \quad \bar{C} = e^C = \text{const}.$

**Приклад 2:** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' = \cos 2x$ .

**Розв'язання:** Послідовно інтегруючи ліву та праву частини двічі, отримаємо:

$$y' = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

$$y = \int \left( \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) + C_1 x = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2.$$

**Відповідь:**  $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2.$

**Приклад 3:** Знайти частинний розв'язок диференційного рівняння при заданих початкових умовах

$$xy' - y = x^3, \quad y(1) = 5/2.$$

**Розв'язання:** Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

$$y = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$x(u' \cdot v + u \cdot v') - uv = x^3,$$

$$x \cdot u' \cdot v + u(x \cdot v' - v) = x^3.$$

Накладемо на функцію  $v$  умову, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$x \cdot v' - v = 0,$$

і знайдемо функцію  $v$  з отриманого диференційного рівняння.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad v = x.$$

Тепер функцію  $u$  знаходимо з рівняння

$$x^2 \cdot u' = x^3,$$

що утворюється в результаті підстановки  $v = x$  до початкового рівняння:

$$du = x \cdot dx,$$

$$u = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Оскільки  $y = uv$ , то загальним розв'язком рівняння є

$$y = \left( \frac{1}{2} x^2 + C \right) \cdot x = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Константу інтегрування  $C$  знаходимо з початкової умови:

$$\frac{5}{2} = \frac{1^3}{2} + C \cdot 1.$$

Отже, 
$$y = \frac{x^3}{2} + 2x.$$

**Приклад 4.:** Розв'язати задачу Коші:  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Розв'язання:** Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Дискримінант  $D = 16 - 16 = 0$ . Отже, рівняння має один дійсний корінь  $k = 2$  подвійної кратності. Тому загальний розв'язок ДР має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку скористаємося початковими умовами. Для цього знайдемо  $y'$ :

$$y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 (e^{2x} + 2x e^{2x}).$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 \cdot 0 = C_1. \text{ Отже, } C_1 = 1.$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2c_1 + c_2(1 + 0).$$

Отже,  $C_2 = -2$ . Остаточного отримаємо  $y = e^{2x} - 2x e^{2x}$ .

### Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

1. а)  $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$ ;      б)  $xy' - 3y = x^4 e^x$ ;

2. а)  $y' = y^2 - 7$ ;      б)  $y' \cos x + y \sin x = 1$ ;

3. а)  $y' + x^2 y = x^2$ ;      б)  $xy' + 2y = \frac{1}{x}$ ;

4. а)  $(\cos^2 x)y' = 2y^3$ ;      б)  $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$ ;

5. а)  $y'x = (1+x)\sqrt{y}$ ;      б)  $xy' = y + xe^{y/x}$ ;

6. а)  $2xydx + (1 - 3x^2)dy = 0$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ ;

7. а)  $(x^2 y^2)y' = 2yx$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-2x}}{x}$ ;

8. а)  $y' = \sqrt{x} \sin^2 y$ ;      б)  $xy' - y = x 2^{-\frac{y}{x}}$ ;

9. а)  $y' - y \cos x = -\cos x$ ;      б)  $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ ;

10. а)  $y' \cos x = (y+1)\sin x$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{3x^2 + 1}{x}$ .

2. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

1.  $3y'' + 7y' - 10y = 0, y(0) = 1; y'(0) = 2$ ;

2.  $3y'' - 27y = 0, y(0) = 1; y'(1) = 2$ ;

3.  $4y'' + 64y = 0, y(0) = 1; y'(\pi/2) = 2$ ;

4.  $y'' + 8y' + 16y = 0, y(0) = 1; y'(0) = 2$ ;

5.  $y'' + y' = 0, y(0) = 1; y'(1) = 1;$
6.  $5y'' - 3y' - 2y = 0, y(0) = 1; y'(0) = 3;$
7.  $y'' - y' = 0, y(0) = 1; y'(0) = 1;$
8.  $6y'' - 216y = 0, y(0) = 1; y'(1) = 0;$
9.  $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1; y'(0) = 1;$
10.  $y'' + 4y = 0, y(0) = 1; y'(\pi/4) = 2.$

### Теми для реферату

1. Диференціальні рівняння в техніці.
2. Використання диференціальних рівнянь для опису перехідних процесів у електричних колах.

### Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння?
4. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
5. Що таке окремий розв'язок диференціального рівняння?
6. Навести приклади диференціальних рівнянь, які описують реальні фізичні й біологічні процеси.

## Модуль 3: Ряди.

### Теми, які виносяться на самостійне вивчення:

#### 1. Дослідження знакозмінних рядів на збіжності. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Дослідження числових рядів на збіжність.

Рядом в математиці називають вираз виду

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — члени деякої нескінченної послідовності. Член  $a_n$  називають загальним членом ряду.

Три крапки в кінці виразу вказують, що останнього доданку немає,

тобто ряд є нескінченною сумою.

Якщо  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  - числа, то ряд називають числовим. В залежності від знаку чисел ряди можуть бути знакопостійними та знакозмінними (знакопочередними).

Наприклад, ряди:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots ,$$

$$2 + 4 + \dots + 2n + \dots ,$$

$$- 1 - 3 - 5 - \dots - (2n - 1) - \dots .$$

є знакопостійними, а ряди

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots ,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots$$

є знакозмінними (знакопочередними).

Знайти суму нескінченної кількості доданків безпосереднім додаванням не може ні людина, ні ЕОМ. Знайти можна лише суму скінченного числа доданків. Такі суми називають частковими сумами ряду. Наприклад,

$$S_1 = a_1 ,$$

$$S_2 = a_1 + a_2 ,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 ,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

А чи може існувати сума нескінченної кількості доданків? Розглянемо приклад: знайти суму ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots .$$

Обчислимо часткові суми цього ряду:

$$S_1 = 1 ,$$

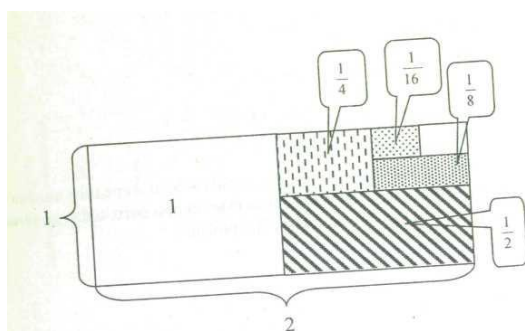
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} ,$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} ,$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} ,$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} .$$

Бачимо, що чим більша кількість доданків, тим ближче  $S_n$  наближається до числа 2. Даний приклад легко проілюструвати геометрично (рис. 1).



$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 \cdot 2 = 2.$$

Не для кожного ряду послідовність часткових сум при  $n \rightarrow \infty$  наближається до конкретного числа.

Наприклад, для ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots,$$

часткові суми  $S_n$  рівні або 0, або 1; для ряду

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots,$$

часткова сума  $S_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Ряд, для якого існує границя послідовності часткових сум при  $n \rightarrow \infty$  називають **збіжним рядом**, а число  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  - **сумою ряду**. Якщо ж  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  або не існує, то ряд називають **розбіжним** і йому не приписують жодного числового значення.

При дослідженні рядів основними є два питання: чи буде даний ряд збіжним і чому буде дорівнювати сума ряду. В багатьох практичних задачах принциповим є перше питання. Тому основну увагу приділимо питанню встановлення збіжності ряду.

**Необхідна ознака збіжності знакопостійного ряду:** Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається, то його загальний член  $a_n$  при необмеженому зростанні  $n$  прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**Приклад 1.** Дано загальний член ряду: а)  $b_n = \frac{n^3 + 1}{n^2}$ ; б)  $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3}$ .

Написати ряд у розгорнутому вигляді і перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду.

**Розв'язання:**

а) Знаходимо  $b_1 = \frac{1^3 + 1}{1^2} = 2$ ,  $b_2 = \frac{2^3 + 1}{2^2} = \frac{9}{4}$ ,  $b_3 = \frac{3^3 + 1}{3^2} = \frac{28}{9}$ ,  $b_4 = \frac{4^3 + 1}{4^2} = \frac{65}{16}$ ; тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^2} = 2 + \frac{9}{4} + \frac{28}{9} + \frac{65}{16} + \dots$$

Тому, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^2} = \infty \neq 0$ , то необхідна ознака збіжності не виконується, отже ряд розбіжний.

б) Знаходимо  $a_1 = \frac{1^2 + 1}{1^3} = 2$ ,  $a_2 = \frac{2^2 + 1}{2^3} = \frac{5}{8}$ ,  $a_3 = \frac{3^2 + 1}{3^3} = \frac{10}{27}$ ,  $a_4 = \frac{4^2 + 1}{4^3} = \frac{17}{64}$ , ...

Записуємо ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} = 2 + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \dots$

Необхідна ознака збіжності виконується, бо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} = 0$ .

Проте зробити висновок про збіжність ряду в даному випадку неможливо. Для встановлення збіжності ряду треба перевірити чи

виконуються достатні умови збіжності.

### Достатні умови збіжності знакопостійного ряду.

**Перша ознака порівняння.** Нехай дано два ряди  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , причому  $a_n > b_n$ . Тоді: а) із збіжності ряду (А) (з більшими членами) випливає збіжність ряду (В) (з меншими членами); б) із розбіжності ряду (В) випливає розбіжність ряду (А).

При застосуванні даної ознаки часто використовують ряди, збіжність яких відома. Це може бути гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (розбіжний); узагальнений гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  (який збіжний при  $\alpha > 1$ , розбіжний при  $\alpha < 1$ ); геометричну прогресію  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  (збіжний при  $|q| < 1$ ).

**Приклад 2.** Використовуючи першу ознаку порівняння, дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

**Розв'язання:** Для порівняння використовуємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  - збіжну геометричну прогресію (бо  $q = \frac{1}{2} < 1$ ). Справедлива нерівність  $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ , отже ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$  збігається.

**Друга ознака порівняння:** Нехай дано два ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ , де  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq \infty$ , то обидва ряди ведуть себе однаконо, тобто збігаються або розбігаються одночасно.

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ .

**Розв'язання:** Тут  $a_n = \frac{1}{2^n - n}$ . Для порівняння використаємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  з загальним членом  $b_n = \frac{1}{2^n}$  - збіжну геометричну прогресію. Звідси:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$$

Тому, що  $\lambda = 1$ , то обидва ряди ведуть себе однаконо і, значить, даний ряд збіжний.

**Ознака Даламбера.** Нехай дано ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тоді, якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ ,

то при  $p < 1$  ряд збіжний, при  $p > 1$  ряд розбіжний; при  $p = 1$  потрібно скористатися іншою ознакою.

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \dots.$$

**Розв'язання:** Тут  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ , отже

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  збіжний.

**Ознака Коші:** Нехай дано ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тоді, якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$ , то при  $p < 1$  ряд збіжний; при  $p > 1$  ряд розбіжний; при  $p = 1$  потрібно скористатися іншою ознакою.

**Приклад 5.** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}$ .

**Розв'язання:** Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3}\right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}\right)^2 = 2^2 = 4 > 1.$$

Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}$  - розбіжний.

**Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду (ознака Лейбніца).**

Якщо члени ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a^n$  спадають по абсолютній величині та  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд збіжний.

Для знакозмінних рядів вводять поняття **абсолютної збіжності**.

Знакозмінний (знакопочередний) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a^n$  називається

**абсолютно збіжним**, якщо збігаються одночасно даний ряд і ряд, складений з абсолютних величин його членів. Якщо ж збігається лише знакозмінний ряд, то його називають **умовно збіжним** рядом.

**Приклад 6.** Дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots;$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} - \dots$$

**Розв'язання:** а) Тому, що  $|1| > \left|\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{3}\right| > \left|\frac{1}{4}\right| > \dots$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  збіжний за ознакою Лейбніца.

Але ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right|$  розбіжний, як гармонічний і, звідси, висновок, що даний знакозмінний ряд збігається умовно.

б) Даний знакозмінний ряд збігається абсолютно, бо ряд, складений із модулів його членів:  $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , є узагальнений гармонічний, який при показникові степеня більшому за одиницю збігається.

## **2. Поняття функціонального ряду. Дослідження функціонального ряду на збіжність.**

Якщо у ряді

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

члени послідовності  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — функції, то ряд називають функціональним.

Наприклад, функціональними будуть ряди

$$\begin{aligned} &\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots, \\ &x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots, \end{aligned}$$

$$\ln x + \ln(1+x) + \ln(2+x) + \dots + \ln(n+x) + \dots$$

Якщо в функціональний ряд підставити  $x = x_0$ , то він перетвориться в числовий. Отриманий при  $x = x_0$  числовий ряд може бути збіжним, або розбіжним.

Точку  $x = x_0$ , в якій функціональний ряд перетворюється в збіжний числовий ряд, називають **точкою збіжності** ряду. Сукупність всіх точок збіжності для даного функціонального ряду називають його **областю збіжності**.

Очевидно, що в точках збіжності  $x_i$  існують значення сум  $S_i$  числових рядів, і можна встановити відповідність між точками збіжності та значеннями сум. Отже, сума функціонального ряду є деяка функція  $f(x)$ , область визначення якої співпадає з областю збіжності функціонального ряду. Кажуть, що функціональний ряд збігається до функції  $f(x)$ , або що функція  $f(x)$  розкладається в ряд. Матимемо:

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

в області збіжності ряду.

Розглянемо деякі функціональні ряди.

## **3. Степеневий ряд. Радіус та інтервал збіжності степеневих рядів.**

## Властивості степеневих рядів.

Функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1 (x-b) + a_2 (x-b)^2 + \dots + a_n (x-b)^n + \dots$$

називають степеневим рядом.

Тут  $x$  – незалежна змінна,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – постійні коефіцієнти ряду,  $b$  – довільна стала.

Якщо ввести заміну  $x - b = z$ , то отримаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Отже, для вивчення степеневих рядів можна обмежитись розглядом ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

**Ознака збіжності степеневих рядів (теорема Абеля).** Якщо степеневий ряд  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$  збіжний при  $x = x_0$ , то він збіжний, причому абсолютно, при всіх  $x$ , для яких виконується умова  $|x| < |x_0|$ . Якщо степеневий ряд розбіжний при  $x = x_0$ , то він розбіжний для всіх  $|x| > |x_0|$ .

Таким чином, із збіжності степеневих рядів в одній точці  $x_0$  слідує його збіжність в цілому інтервалі  $-x_0 < x < x_0$ . Число  $R = |x_0|$  називають **радіусом збіжності** степеневих рядів. Радіус збіжності визначається з співвідношень:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{ або } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right|,$$

які впливають з ознак Даламбера та Коші для числових рядів. Дійсно, по ознаці Даламбера ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  збігатиметься, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \right| = \left| \frac{x}{R} \right| < 1.$$

Отже, при  $|x| < R$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  буде абсолютно збіжним. Аналогічно доводиться і друге співвідношення.

Область збіжності степеневих рядів може бути рівна:

- а) одній точці  $x = a$ ;
- б) відрізка  $(a; b)$ ;
- в) всій числовій осі.

**Приклад 7.** Дослідити на збіжність степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$ .

**Розв'язання:** Тут  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$ , тоді радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2, \text{ отже область збіжності } -2 < x < 2.$$

Дослідимо збіжність ряду в граничних точках. При  $x = \pm 2$  степеневий ряд матиме вигляд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\pm 2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n n^2$ . Обидва ці ряди розбіжні, бо для них не виконуються необхідні ознаки збіжності, отже область збіжності ряду  $(-2; 2)$ .

**Приклад 8.** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}}$ .

**Розв'язання:** Введемо заміну  $x - 3 = z$ , тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}},$$

запишемо:  $a_n = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}}, a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{((n+1)^2+1) \cdot 2^{n+1}}}.$

Радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{((n+1)^2+1) \cdot 2^{n+1}}}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2};$$

отже область збіжності ряду  $-\sqrt{2} < z < \sqrt{2}$ , або  $3-\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{2}$ .

Перевіримо збіжність ряду в граничних точках: при  $x = 3+\sqrt{2}$  отримаємо знакопостійний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

який є розбіжним (згідно другої ознаки порівняння з гармонічним рядом); при  $x = 3-\sqrt{2}$ , отримаємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(-2)^n}}{\sqrt{(n^2+1) \cdot 2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

який збіжний згідно ознаки Лейбніца. Отже область збіжності ряду є  $3-\sqrt{2} \leq x < 3+\sqrt{2}$ .

**Властивості степеневих рядів.**

Степеневі ряди мають ряд цікавих властивостей:

1. Сума степеневого ряду є неперервною функцією в області його збіжності.
2. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь – якому відрізку з області його збіжності.
3. Степеневий ряд можна почленно диференціювати в будь – якій точці з області його збіжності.

#### **4. Розклад функції в степеневий ряд.**

Нехай функція  $f(x)$  нескінченно диференційована в околі точки  $x = 0$  та розкладається в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – можна визначити послідовно диференціюючи обидві частини ряду:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots, \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots, \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + \dots, \\ &\text{і т.д.} \end{aligned}$$

та підставляючи  $x = 0$  в отримані вирази:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= 1 \cdot a_1 = 1! a_1, & a_1 &= \frac{f'(0)}{1!}, \\ f''(0) &= 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2, & a_2 &= \frac{f''(0)}{2!}, \\ f'''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 = 3! a_3, & a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!}, \\ &\text{і т.д.} \end{aligned}$$

Отримані вирази для коефіцієнтів підставимо в ряд; одержимо:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Такий ряд називають **рядом Маклорена** функції  $f(x)$ , а функцію  $f(x)$  – породжуючою для ряду Маклорена.

Проведені міркування дозволяють зробити важливий висновок, який записують у вигляді теореми.

**Теорема.** Якщо нескінченно диференційована в околі точки  $x = 0$  функція  $f(x)$  може бути розкладена в степеневий ряд, то це буде ряд Маклорена цієї функції.

Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне. Можна вказати такі функції, для яких ряд Маклорена розбіжний при  $x = 0$ , або ж сума ряду не співпадає з породжуючою його функцією. Відмітимо, що для елементарних функцій ряд Маклорена збігається до цих функцій в області своєї збіжності.

Розглянемо розклад в ряд Маклорена деяких функцій.

1.  $y = e^x$ .

а) знайдемо похідні функції та їх значення в т.  $x = 0$ :

$$\begin{array}{ll} y = e^x & y(0) = e^0 = 1 \\ y' = e^x & y'(0) = 1 \\ y'' = e^x & y''(0) = 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y^{(n)} = e^x & y^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

б) запишемо ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

в) встановимо область збіжності отриманого ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \text{ отже } -\infty < x < +\infty.$$

2.  $y = \sin x$

а) знайдемо похідну функції та її значення в т.  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} y &= \sin x & y(0) &= \sin 0 = 0 \\ y' &= \cos x & y'(0) &= \cos 0 = 1 \\ y'' &= -\sin x & y''(0) &= 0 \\ y''' &= -\cos x & y'''(0) &= -1 \\ y^{IV} &= \sin x & y^{IV}(0) &= 0 \end{aligned}$$

(похідні старших порядків повторюють попередні значення,  $y^V=y$ ;  $y^{IV}=y''$  і т. д.)

Дістанемо формулу для  $y^{(n)}$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

б) запишемо ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

в) встановимо область збіжності отриманого ряду

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)!};$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1}{(2n+3)!};$$

Таким чином:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} ((2n+2) \cdot (2n+3)) = \infty,$$

отже ряд збіжний на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

Аналогічно:

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \text{ область збіжності } (-\infty; +\infty);$$

$$4. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \text{ область збіжності } (-1; 1);$$

$$5. (1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)x^n}{n!}$$

область збіжності  $(-1; 1)$ ;

Даний ряд називають **біноміальним рядом**.

$$6. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots; \text{ область збіжності } (-1; 1).$$

**Приклад 9.** Розкласти функцію  $f(x) = 2^x$  в ряд Маклорена.

**Розв'язання:** Знаходимо похідні і обчислюємо їх значення при  $x = 0$ :

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = 2^x \ln 2 & f'(0) = \ln 2 \\ f''(x) = 2^x \ln^2 2 & f''(0) = \ln^2 2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2 & f^{(n)}(0) = \ln^n 2 \end{array}$$

Тоді,

$$2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1!} x + \frac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!} x^n + \dots.$$

При розкладі в степеневий ряд деяких функцій можна використати заміну і вже відомі розклади.

**Приклад 10.** Розкласти в ряд функцію  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Розв'язання:** Нехай  $y = -x^2$ , тоді

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots + y^n + \dots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

**Приклад 11.** Розкласти в ряд Маклорена функцію  $y = e^{5x}$ .

**Розв'язання:** Нехай  $z = 5x$ , тоді

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \text{ отже,} \\ e^{5z} &= 1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2!} + \dots + \frac{(5x)^n}{n!} + \dots. \end{aligned}$$

Розклад функції в степеневий ряд часто використовують для наближеного обчислення її значення.

**Приклад 12.** Обчислити значення функції  $y = e^x$  при  $x = 2$  з точністю 0,001.

**Розв'язання:** Використаємо розклад функції  $y = e^x$  в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

При  $x = 2$  отримаємо

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^{10}}{10!} + \dots.$$

Обмежимося лише першими одинадцятьма членами, бо  $\frac{2^{10}}{10!} < 0,001$ , тобто наступні члени не впливатимуть на точність обчислення.

$$\text{Отже, } e^2 \approx 1 + 2 + \frac{4}{2!} + \dots + \frac{2^{10}}{10!} = 7,389.$$

Використання властивостей степеневих рядів спрощує розв'язання багатьох задач.

## 5. Поняття тригонометричного ряду Фур'є. Гармонічні коливання.

### Розкладання функцій у ряд Фур'є

Періодичну функцію  $f(x)$  з періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  можна представити як суму ряду такого виду:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

де  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  – постійні величини.

Такий ряд називають тригонометричним рядом, а сталі  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  – коефіцієнтами ряду. Говорять, що такий запис представляє собою розклад періодичної функції  $f(x)$  в тригонометричний ряд. Покладемо  $\omega t = x$  тоді ряд набуде вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (T)$$

Як бачимо, всі доданки ряду  $T$  — тригонометричні функції з спільним періодом  $2\pi$ . Тому й сума ряду  $T$  буде періодичною функцією з таким самим періодом. В силу періодичності суми ряду  $T$  розкласти в тригонометричний ряд неперіодичну функцію можна лише на відрізку, довжина якого дорівнює  $2\pi$ . В подальшому використовується відрізок  $(-\pi; \pi)$ .

Перейдемо до питання знаходження коефіцієнтів ряду. Формули знаходження коефіцієнтів виводяться шляхом інтегрування лівої та правої частини ряду  $(T)$  і домноженням на  $\cos nx$  або  $\sin nx$ . Запишемо формули:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (n = 1, 2, 3 \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Тригонометричний ряд, коефіцієнти якого визначені за приведеними формулами називають **рядом Фур'є** функції  $f(x)$ , а функцію  $f(x)$  – породжуючою для ряду.

З вище записаних формул легко можна показати, що якщо  $f(x)$  – парна функція, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = 0$$

(говорять, що функція розкладається в ряд Фур'є по косинусах);

якщо  $f(x)$  – непарна функція, то  $a_0 = 0; a_n = 0; b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$

(функція розкладається в ряд Фур'є по синусах).

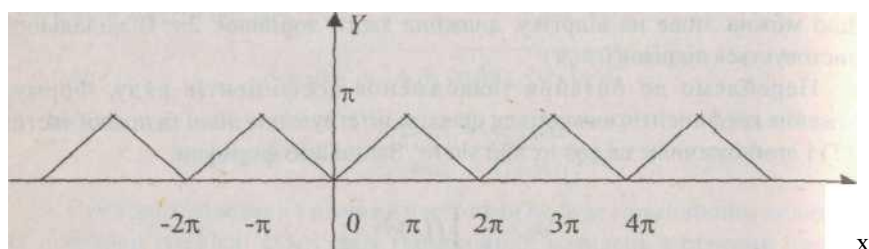
Зауважимо, що записаний для функції  $f(x)$  ряд Фур'є не завжди збігається саме до неї приведемо достатню умову збіжності ряду Фур'є до породжуючої його функції.

**Теорема.** Якщо функція  $f(x)$  має скінченну кількість точок розриву I роду на проміжку  $(-\pi; \pi)$ , то її ряд Фур'є збігається до неї на цьому проміжку.

**Приклад 13.** Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію  $y = |x|$  з періодом  $2\pi$ .

**Розв'язання:**

а) Побудуємо графік даної функції з врахуванням періодичності:



б) Дана функція парна, тому коефіцієнти будемо знаходити за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = 0;$$

в) Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

Отже, знайдено  $a_0 = \pi$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx;$$

даний інтеграл знаходимо інтегруванням частинами:

|                   |                           |
|-------------------|---------------------------|
| $u = x$           | $du = dx$                 |
| $dv = \cos nx dx$ | $V = \frac{1}{n} \sin nx$ |

$$\text{Тоді } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right).$$

Враховуючи, що  $\sin 0$  і  $\sin n\pi$  дорівнює 0, отримаємо:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi^2} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi^2} (\cos \pi n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2}, & \text{якщо } n - \text{непарне} \\ 0, & \text{якщо } n - \text{парне} \end{cases}$$

Отже,

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{якщо } n - \text{непарне} \\ 0, & \text{якщо } n - \text{парне} \end{cases}$$

г) Підставимо знайдені значення у формулу

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

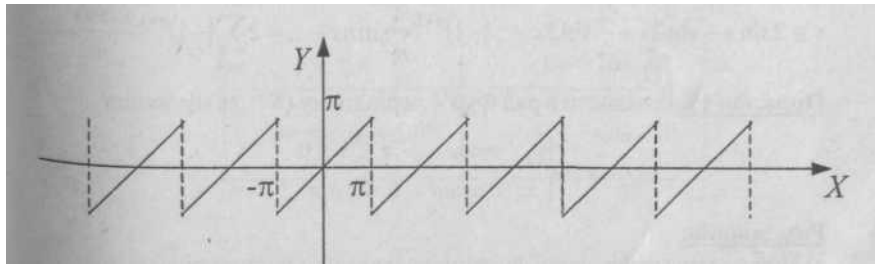
отримаємо:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi \cdot 1^2} \cos x - \frac{4}{\pi \cdot 3^2} \cos 3x - \frac{4}{\pi \cdot 5^2} \cos 5x - \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \end{aligned}$$

**Приклад 14.** Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію  $f(x) = x$  ( $T = 2\pi$ ).

**Розв'язання:**

а) Побудуємо графік даної функції з врахуванням періодичності:



б) Дана функція непарна, отже  $a_0 = a_n = 0$ ,  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$ .

в) Обчислимо коефіцієнти ряду

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx =$$

|                   |                            |
|-------------------|----------------------------|
| $u = x$           | $du = dx$                  |
| $dv = \sin nx dx$ | $V = -\frac{1}{n} \cos nx$ |

$$= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi}{n} \cos \pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{n} \cos \pi =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{якщо } n - \text{парне;} \\ \frac{2}{n} & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

Тут враховано, що  $\sin \pi = \sin 0 = 0$ ,  $\cos \pi = \pm 1$  в залежності від значень  $n$ .

г) Підставимо знайдені значення в ряд Фур'є, який в даному випадку має вигляд

$$f(x) = b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin 2x + \dots + b_n \cdot \sin nx \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Отримаємо

$$x \equiv 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \dots (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx + \dots = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

### ***Запитання для самоперевірки***

1. Які ряди називаються збіжними?
2. Що називають сумою збіжного ряду?
3. Які ряди називають розбіжними?
4. Сформулюйте ознаку Даламбера.
5. Який ряд називається знакозмінним?
6. Сформулюйте ознаку Лейбніца.
7. Який ряд називається абсолютно збіжним?
8. Який ряд називається умовно збіжним?
9. Який ряд називається гармонічним?
10. Який ряд називається функціональним?
11. Як знайти область збіжності функціонального ряду?
12. Який ряд називається степеневим?
13. Що називають інтервалом збіжності степеневого ряду?
14. Як знайти інтервал збіжності степеневого ряду?
15. Який вигляд має ряд Маклорена?
16. Що називають рядом Фур'є?

### ***Завдання для самостійної роботи***

1. Записати перші п'ять членів ряду по заданому загальному члену

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 1};$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n + n};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2n + 5};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!};$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 1};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n};$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + n};$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!};$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 1};$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + n};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{100^n - 1};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n};$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 1};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 1)^2}{4n};$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)};$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2};$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n};$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2 + 1};$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 1}.$$

2. Записати формулу загального члена ряду:

$$1. 2 + 4 + 8 + 16 + \dots;$$

$$2. \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots;$$

$$3. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots;$$

$$4. \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots;$$

$$5. \frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{6}{9} + \frac{8}{16} + \dots;$$

$$6. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots;$$

$$7. \frac{1}{3} + \frac{16}{9} + \frac{81}{27} + \frac{256}{81} + \dots;$$

$$8. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots;$$

$$9. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots;$$

$$10. \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots;$$

$$11. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots;$$

$$12. \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots;$$

$$13. \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4^4} + \dots;$$

$$14. 5 + \frac{5^2}{2^2} + \frac{5^3}{3^3} + \frac{5^4}{4^4} + \dots;$$

$$15. \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots;$$

$$16. \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots;$$

$$17. \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots;$$

$$18. 6 + \frac{6^2}{2^2} + \frac{6^3}{3^3} + \frac{6^4}{4^4} + \dots;$$

$$19. 3 + 9 + 27 + \dots;$$

$$20. \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots;$$

$$21. \frac{2}{6} + \frac{4}{36} + \frac{6}{216} + \dots;$$

$$22. \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots;$$

$$23. \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots;$$

$$24. \frac{4}{1^2} + \frac{4^2}{2^2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots;$$

$$25. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots;$$

$$26. 8 + \frac{8^2}{2^2} + \frac{8^3}{3^3} + \frac{8^4}{4^4} + \dots;$$

$$27. 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots;$$

$$28. \frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \dots;$$

$$29. \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots;$$

$$30. \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots.$$

3. Дослідити на збіжність ряди:

1.  $1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{1 \cdot 2} + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots;$
2.  $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{(\sqrt{3})^2} + \frac{5}{(\sqrt{3})^3} + \dots + \frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n} + \dots;$
3.  $\frac{2}{5} + \frac{2^2 \cdot 2^2}{5^2} + \frac{2^3 \cdot 3^2}{5^3} + \dots + \frac{2^n \cdot n^2}{5^n} + \dots;$
4.  $10 + \frac{10^2}{2^2} + \frac{10^3}{3^3} + \dots + \frac{10^n}{n^n} + \dots;$
5.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots;$
6.  $\frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3} + \dots + \frac{(n+1)!}{10^n} + \dots;$
7.  $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots;$
8.  $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} + \dots;$
9.  $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots + \frac{n^n}{n!} + \dots;$
10.  $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots;$
11.  $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$
12.  $\frac{3}{1^2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^2} + \dots + \frac{3^n}{n^2} + \dots;$
13.  $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^n} + \dots;$
14.  $\frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3^3} + \dots + \frac{(n+1)!}{3^n} + \dots;$
15.  $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots;$
16.  $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{3^n}{n(n+1)} + \dots;$
17.  $\frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \dots + \frac{10^n}{2n+5} + \dots;$
18.  $2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \dots;$
19.  $\frac{1!}{5} + \frac{2!}{5^2} + \frac{3!}{5^3} + \dots + \frac{n!}{5^n} + \dots;$
20.  $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots;$

$$21. -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots;$$

$$22. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \dots;$$

$$23. \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots;$$

$$24. -\frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n-1}{2n+1} + \dots;$$

$$25. \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)!} + \dots;$$

$$26. \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n} + \dots;$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n-1};$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-1};$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+1)!};$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)^2}.$$

4. Розкласти в ряд Маклорена функції:

$$1. y = \cos 3x;$$

$$11. y = 8^x;$$

$$21. y = 5^x;$$

$$2. y = e^{\frac{x}{2}};$$

$$12. y = \cos 5x;$$

$$22. y = \sin 4x;$$

$$3. y = \sin 5x;$$

$$13. y = e^{3x};$$

$$23. y = 6^x;$$

$$4. y = \ln(1+6x);$$

$$14. y = \cos 7x;$$

$$24. y = \cos 4x;$$

$$5. y = e^{\sin x};$$

$$15. y = \ln(1+3x);$$

$$25. y = \ln(1+5x);$$

$$6. y = \cos 2x;$$

$$16. y = 4^x;$$

$$26. y = 7^x;$$

$$7. y = 3^x;$$

$$17. y = \sin 2x;$$

$$27. y = \sin 6x;$$

$$8. y = e^{2x};$$

$$18. y = e^{-2x};$$

$$28. y = \ln(1+4x);$$

$$9. y = \sin 3x;$$

$$19. y = e^{\cos x};$$

$$29. y = e^{4x};$$

$$10. y = \ln(1+2x);$$

$$20. y = \cos 6x;$$

$$30. y = \cos 8x.$$

## **6. Теорема додавання та множення ймовірностей**

*Дії над подіями та їх ймовірностями.*

Більш складні випадкові події можна представити, як набір декількох більш простих. Наприклад, випадіння парного числа очок на гральній кості (подія А) може бути представлено, як набір подій  $A_1, A_2, A_3$ , де  $A_1$  - випадання

двох очок;  $A_2$  - випадання чотирьох очок; випадання шести очок. Для представлення складної події через більш прості вводять поняття додавання та множення подій.

**Сумою** (об'єднанням) двох подій  $A$  і  $B$  називають подію  $C$ , яка полягає в здійсненні хоча б однієї із подій  $A$  або  $B$

Символічний запис:

$$C = A + B \text{ або } C = A \cup B.$$

**Добутком** (перетином) двох подій  $A$  і  $B$  називають подію  $C$ , яка полягає в одночасному здійсненні і події  $A$ , і події  $B$  (рис. 2).

Символічний запис:

$$C = A \cdot B, \text{ або } C = A \cap B.$$

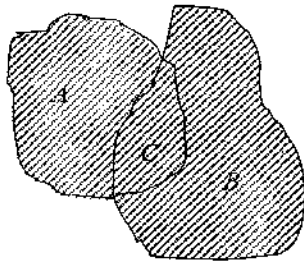


Рис. 1

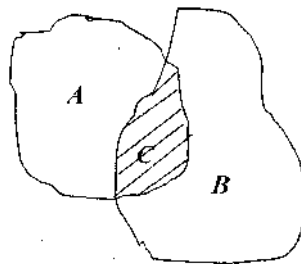


рис. 2

**Приклад 1.** Знайти суму подій:  $A$  - "поява одного очка при киданні гральної кості" і  $B$  - "поява двох очок при киданні гральної кості".

**Розв'язання.** Сумою  $A + B$  є подія  $C$  - "поява не більше двох очок при киданні гральної кості". Тому  $A + B = C$ .

**Приклад 2.** Знайти добуток подій  $A$  - "студент на екзамені витягує білет з парним номером" і  $B$  - "студент витягає білет з номером, який кратний п'яти".

**Розв'язання.** Добутком  $A \cdot B$  є подія  $C$  - "студент витягнув білет з номером, який кратний десяти", тому  $A \cdot B = C$ .

Імовірності добутку й суми подій встановлюють за допомогою відповідних теорем.

**Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.**

Ймовірність появи однієї із кількох попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

**Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.**

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

**Теорема множення ймовірностей незалежних подій.**

Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)$$

### Теорема множення ймовірностей залежних подій.

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку однієї з них на умовну ймовірність другої.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_4(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

**Приклад 3.** В ящику лежать 20 деталей, причому 5 з них стандартні. Робітник бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з них стандартна (подія А).

**Розв'язання:** Нехай В - подія, яка полягає в тому, що одна взята деталь стандартна, а дві - нестандартні; С - подія, яка полягає в тому, що дві взяті деталі стандартні, а одна - нестандартна; D - подія, яка полягає в тому, що всі три взяті деталі стандартні.

Очевидно, що подія А відбудеться, якщо відбудеться хоча б одна з подій В, С, D.

Отже, подію А можна записати як суму подій В, С, D  $A = B + C + D$ .

Події В, С, D несумісні, отже

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{C_3^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} + \frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228}$$

Дану задачу можна розв'язати простіше, якщо ввести подію  $\bar{A}$  - жодна з взятих трьох деталей не буде стандартною. Тоді

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

а знайшовши ймовірність події  $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{91}{228}.$$

Обчислимо

$$P(A) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228}.$$

**Приклад 4.** Знайти ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число буде кратним або 3, або 5. або обом сразу.

**Розв'язання:** Нехай А - подія, яка полягає в тому, що вибране число кратне 3, а В- в тому, що вибране число кратне 5. Знайдемо  $P(A+B)$ . Оскільки А, В – сумісні події, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Обчислимо:  $P(A)=30/90$  (серед чисел від 10 до 99 саме 30 кратні 3),  $P(B)=18/90$  (чисел кратних 5 серед двоцифрових 18),  $P(AB)=6/90$  (числа 15, 30, 45, 60, 90, 75 кратні і 3 і 5), отже

$$P(A+B)=\frac{30}{90}+\frac{18}{90}-\frac{6}{90}=\frac{7}{15}.$$

**Приклад 5.** В ящику 12 деталей, серед них 8 бракованих. Робітник бере за один раз 2 деталі, а потім за другий раз ще 2 деталі. Яка ймовірність, що взяті деталі стандартні?

**Розв'язання:** Нехай подія  $A$  - полягає в тому, що перший раз взяті деталі стандартні; подія  $B$  - полягає в тому, що за другий раз взяті деталі стандартні.

Тому, що  $A$ ,  $B$ -залежні події, то

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}\cdot\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{56}{99}.$$

**Приклад 6.** В одній урні 5 білих і 3 чорних куль, а у другій - 6 білих і 4 чорні кулі. Яка ймовірність, що з обох урн візьмуть чорну кулю?

**Розв'язання:** Нехай  $A$  - подія, яка полягає в тому що чорну кулю взяли з першої урни;  $B$  - чорну кулю взяли з другої урни: Тому, що події  $A$ ,  $B$  - незалежні, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{10}=\frac{3}{20}.$$

## **7. Дискретні випадкові величини. Поняття про закон розподілу дискретної випадкової величини. Неперервні випадкові величини. Числові характеристики випадкових величин.**

**Випадковою величиною** називають змінну  $X$ , яка в результаті випробування може прийняти одне і лише одне значення, не відоме раніше і таке, що залежить від наслідку випробування. Можна пояснити, що величина буде випадковою, якщо вона приймає в даному випробуванні різні значення.

Випадкові величини поділяються на *дискретні* та *неперервні*. Ми розглядатимемо дискретні випадкові величини.

Величину  $X$  називаємо **дискретною випадковою величиною**, якщо множина її можливих значень є скінченою або нескінченною послідовністю чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Де кожне співвідношення  $X=x_i$  є елементарною випадковою подією і має визначену ймовірність  $P=p_i$ .

Оскільки, кожне значення дискретної випадкової величини має визначену ймовірність, то дані спостережень зручно заносити у таблицю:

табл. 1.

|                                  |       |       |       |       |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Значення випадкової величини $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ..... | $x_n$ |
| Ймовірність цього значення $P$   | $p_1$ | $p_2$ | ..... | $p_n$ |

Дана таблиця носить назву *таблиці закону розподілу дискретної випадкової величини*. Закон розподілу можна задати також у вигляді рівняння або графічно.

**Означення** Дві випадкової величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуває інша випадкова величина. У протилежному разі випадкові величини залежні.

Наведемо деякі приклади дискретних випадкових величин та їх розподілів.

1. Рівномірний дискретний розподіл: випадкова величина набуває  $n$  різних значень з ймовірністю  $1/n$  кожне.

2. Біноміальний розподіл.

3. Геометричний розподіл: проводяться незалежні випробування з ймовірністю успіху  $p$ .

$X$  - кількість спроб до першої появи події  $A$ , тобто до успіху;  $q = 1 - p$ . Закон розподілу подається таблицею:

|       |     |      |        |     |            |     |
|-------|-----|------|--------|-----|------------|-----|
| $X$   | 0   | 1    | 2      | ... | $n$        | ... |
| $p_i$ | $p$ | $qp$ | $q^2p$ | ... | $q^{n-1}p$ | ... |

4. Гіпергеометричний розподіл. Нехай в партії  $N$  виробів, із них  $n$  - бракованих.  $N - n$  - якісних. Навмання вибирають  $k$  виробів. Знайти закон розподілу величини  $X$  - кількість бракованих виробів серед  $k$ .

$$p_i = P(X = r) = \frac{C_n^r C_{N-n}^{k-r}}{C_N^k}; \quad x_i = r = 0, 1, \dots, k.$$

**Приклад 1.** Вибираємо навмання одне з натуральних чисел від 1 до 10 і підраховуємо кількість його натуральних дільників  $X$ . Знайти закон розподілу випадкової величини  $X$ .

Складемо спочатку таблицю кількості дільників натуральних чисел:

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $\Omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $X$      | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4  |

Вибір будь-якого числа від 1 до 10 є рівноможливим, тому ймовірність його вибору дорівнює 0,1. Об'єднавши результати, що відповідають однаковій кількості дільників, і додавши їх ймовірність, знайдемо закон

розподілу X:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 1   | 2   | 3   | 4   |
| p | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,3 |

Контроль:  $0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,3 = 1$ .

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину, але він може бути невідомим; тоді корисними є деякі сталі величини, які дають уявлення про випадкову величину. Такі сталі величини називають числовими характеристиками випадкових величин. Серед числових характеристик особливе значення має математичне сподівання.

**Означення .** Математичним сподіванням ( або середнім значенням ) дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності:

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (3)$$

Нехай випадкова величина може набувати значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  і всі її значення однаково ймовірні. Тоді ймовірність кожного з них  $p = 1/n$ .

Математичне сподівання цієї випадкової величини

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Отже, в даному разі математичним сподіванням випадкової величини є середнє арифметичне всіх її можливих значень. У загальному випадку математичне сподівання випадкової величини не буде середнім арифметичним всіх її можливих значень. Проте в деякому розумінні його можна розглядати саме так. Справа в тому, що в задачах практичного спрямування закон розподілу випадкової величини є невідомим. Тому виконують велику кількість випробувань або спостережень, кожне з яких відбувається у приблизно однакових умовах. Таку сукупність спостережень називають вибіркою із значень, яких набуває дана величина

Нехай у вибірці з  $n$  спостережень за випадковою величиною X ця величина  $n_1$  разів набувала значення  $x_1, \dots$ ;  $n_2$  разів - значення  $x_2, \dots$ ;  $n_k$  разів - значення  $x_k$ , причому  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Тоді сума всіх значень, які спостерігались, дорівнює  $x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k$ . Величина

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n} \quad (4)$$

називається **вибірковим середнім**.

Зауважимо, що відношення  $n_1/n$  є відносною частотою значення  $x_1$ ,  $n_2/n$  є відносною частотою значення  $x_2$ ,  $n_k/n$  є відносною частотою значення  $x_k$ , причому відношення  $n_1/n, n_2/n, \dots, n_k/n$  змінюються від вибірки до вибірки.

Проте за достатньо великої кількості спостережень  $n$  маємо наближені рівності

$$\frac{n_1}{n} \approx p_1, \frac{n_2}{n} \approx p_2, \dots, \frac{n_k}{n} \approx p_k. \quad (5)$$

Підставивши (5) у (4), дістанемо

$$\bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = M(X). \quad (6)$$

Це означає, що математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більше число спостережень) вибіркового середньому.

Властивості математичного сподівання:

- 1)  $M(C) = C$ , де  $C$  – стала величина;
- 2)  $M(X + C) = M(X) + C$ ;
- 3)  $M(k \cdot X) = k \cdot M(X)$ , де  $k$  – довільне число;
- 4)  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$  для будь-яких  $X$  і  $Y$ ;
- 5)  $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ , якщо  $X$  і  $Y$  – незалежні випадкові величини.

Точку з координатою  $M(X)$  називають центром розсіювання ймовірностей. Випадкову величину  $X - M(X)$  називають відхиленням. Різні випадкові величини можуть мати одне й те саме математичне сподівання. Тому виникає потреба розглянути ще одну числову характеристику для вимірювання ступеня розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання.

**Означення** Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини.

Позначається дисперсія  $D(X)$ . Отже,

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (7)$$

Поряд з дисперсією розглядають також характеристику, яка вимірюється в тих самих одиницях, що і випадкова величина.

**Означення** Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини  $X$  називається корінь квадратний з її дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (8)$$

**Приклад .** Знайти числові характеристики випадкової величини, яку розглянуто у прикладі 1:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 = 2,7.$$

Складемо закон розподілу випадкової величини  $Y = (X - 2,7)^2$ :

|       |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|
| $Y_k$ | 2,89 | 0,49 | 0,09 | 1,69 |
| $p_k$ | 0,1  | 0,4  | 0,2  | 0,3  |

$$\begin{aligned} D(X) &= (x_1 - 2,7)^2 p_1 + (x_2 - 2,7)^2 p_2 + (x_3 - 2,7)^2 p_3 + (x_4 - 2,7)^2 p_4 = \\ &= y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3 + y_4 p_4 = 2,89 \cdot 0,1 + 0,49 \cdot 0,4 + 0,09 \cdot 0,2 + \\ &\quad + 1,69 \cdot 0,3 = 0,289 + 0,196 + 0,018 + 0,507 = 1,010; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,010} \approx 1,005.$$

**Теорема (формула обчислення дисперсії).** Дисперсія випадкової

величини  $X$  дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата і квадратом математичного сподівання цієї випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (9)$$

Дійсно, згідно з властивостями  $M(X)$ , знаходимо

$$\begin{aligned} D(X) &= M(x^2 - 2XM(X) + (M(X))^2) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = \\ &= M(X^2) - (M(X))^2. \end{aligned}$$

Властивості дисперсії:

- 1)  $D(C) = 0$ , де  $C$  – стала;
- 2)  $D(CX) = C^2 D(X)$ ;
- 3)  $D(C + X) = D(X)$ ;
- 4)  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ , якщо  $X$  і  $Y$  – незалежні;
- 5)  $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$ , якщо  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – попарно незалежні.

Вибірковою дисперсією називається вираз

$$S^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{n}, \quad (10)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_k$  різні значення випадкової величини, що спостерігаються;  $n_1, n_2, \dots, n_k$  – їхні частоти;  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  – загальна кількість спостережень;  $\bar{x}$  – вибіркове середнє. Величину  $S$  називають вибірквим середнім квадратичним, або стандартним відхиленням.

### ***Запитання для самоперевірки***

1. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
2. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей сумісних подій.
3. Що називають умовною ймовірністю подій?
4. Формулювати теореми множення ймовірностей залежних та незалежних подій.
5. Що називається дискретною випадковою величиною?
6. Як скласти закон розподілу дискретної випадкової величини?
7. Що називається математичним сподіванням і як його обчислюють?
8. Перелічіть властивості математичного сподівання.

### ***Завдання для самостійної роботи***

1. В урні лежать 12 білих та 4 чорних куль. Яка ймовірність одночасно витягнути 3 білих та 1 чорну кулю?
2. В урні лежать 6 білих та 8 чорних куль. Яка ймовірність за першим разом взяти 2 білі, а за другим 2 чорні кулі?
3. В урні лежать 3 білі, 7 червоних та 5 чорних куль. Яка ймовірність того, що серед взятих 4-х куль всі червоні?
4. З колоди карт навмання беруть 2. Яка ймовірність, що взяті карти тузи?
5. З 30 білетів студент вивчив 25, Яка ймовірність того, що витягнутий ним

- білет він не знає?
6. З цифр від 1 до 9 вибирають одну. Яка ймовірність, що вибрана цифра кратна 3?
  7. В лотереї з 15 білетів 5 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що обидва білети виграшні?
  8. В лотереї з 30 білетів 10 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що жоден білет невикористаний?
  9. В урні лежать 10 білих та 5 чорних куль. Яка ймовірність одночасно витягнути 2 білих та 1 чорну кулю?
  10. В урні лежать 5 білих та 7 чорних куль. Яка ймовірність за першим разом взяти 2 білі, а за другим 2 чорні кулі?
  11. В урні лежать 2 білі, 5 червоних та 3 чорних куль. Яка ймовірність того, що серед взятих 5-ти куль всі червоні?
  12. З колоди карт навмання беруть 3. Яка ймовірність, що взяті карти тузи?
  13. З 30 білетів студент вивчив 27, Яка ймовірність того, що витягнутий ним білет він не знає?
  14. З цифр від 1 до 9 вибирають одну. Яка ймовірність, що вибрана цифра кратна 2?
  15. В лотереї з 15 білетів 10 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що обидва білети виграшні?
  16. В лотереї з 35 білетів 15 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що жоден білет невикористаний?
  17. Серед 30 учнів 18 хлопців та 12 дівчат. Яка ймовірність, що вибрали 2 хлопці і 2 дівчини?
  18. Робітник обслуговує 2 автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший автомат не потребує уваги робітника 0,8, а для другого автомата ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що протягом години жодний з автоматів не потребує уваги робітника.
  19. Під час обробки деталей на верстаті в середньому 4% з них бувають з дефектами. Яка ймовірність того, що кожні 2 деталі з 30 взятих на перевірку будуть з дефектами?
  20. Серед 25 учнів 10 хлопців та 15 дівчат. Яка ймовірність, що вибрали 3 хлопці і 4 дівчини?

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Базова

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу 10-11 класи-К, Зодіак-ЕКО, 2000.
2. Алгебра і початки аналізу /За ред. Колмогорова А.М., Освіта, 1993/
3. Математика: Програма для навчальних закладів підготовки молодших спеціалістів /Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.К-2001.
4. Афанасьєва, Бродский Я.С, Гуткин И.И., Павлов А.Л. Сборник задач по математике для техникумов. – М : Наука, 1992
5. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа /Под ред. Г.Н. Яковлева. Ч.2. – М.:Наука, 1987
6. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа /Под ред. Г.Н. Яковлева. Ч.2. – М.:Наука, 1968
7. М.І.Шкіль, Т.В.Колесник, В.М.Котлова Основи вищої математики (у трьох книгах), К.Либідь, 1994р
8. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- М:Выс.шк, 1979, 1983, 1990.
9. О.М.Афанасьєва, Бродський Я.С, Павлов А.Л., А.К.Слипенко. Дидактичні матеріали з математики-К. Вища школа, 2001р.
10. Вычислительная математика / Н.И.Данилина и др.-М:Высш.шк, 1985
11. О.М.Афанасьєва, Бродский Я.С, Павлов А.Л., А.К.Слипенко. Математика-К.Вища школа, 2001р.
12. Вычислительная математика-Н.И.Демилина и др. -М.Высш.школа, 1985г.

### Допоміжна

1. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Інтеграл та його застосування» -ХЕМТТБ. 2011р.
2. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Похідна та її застосування» -ХЕМТТБ. 2011р.
3. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Комплексні числа» -ХЕМТТБ. 2005р.
4. Методична розробка „Організація пізнавальної діяльності студентів при вивченні теми «РЯДИ» з дисципліни “Основи вищої математики””- ХЕМТТБ. 2009 р.
5. Методична розробка « Пряма лінія на площині та її рівняння» - ХЕМТТБ. 2005р.
6. Презентація по темі «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» -ХЕМТТБ. 2013 р.