



Міністерство освіти і науки України

**Харківський електромеханічний ордена «Знак Пошани»
технікум транспортного будівництва**

**Методичний посібник
для самостійної роботи студентів
з дисципліни „Основи вищої математики ”**

**для студентів спеціальності
5.05070103
«Електропостачання»**

**Харків
2015**

Автор: О.М.Котова,— викладач Харківського електромеханічного технікуму транспортного будівництва.

Методичний посібник розглянутий і рекомендований для використання цикловою комісією природничо-математичних дисциплін

Рецензент: О.С. Омельченко — голова циклової комісії природничо-математичних дисциплін Харківського електромеханічного технікуму транспортного будівництва.

Змістовий модуль 1 Елементи лінійної алгебри

Мета даної теми – розвинення навичок розв'язування систем лінійних рівнянь.

При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Визначники третього порядку та їх властивості; обчислення визначників за правилом трикутника та за допомогою алгебраїчних доповнень. Системи 3-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими та методи їх розв'язування (правило Крамера, метод Гауса).

Теми, які виносяться на самостійне вивчення:

Розв'язання систем за методами Крамера і Гауса

Метод Гауса. Він полягає ось у чому: систему рівнянь зводять до рівносильної системою з трикутною матрицею (матриця, в якій всі елементи, що розміщені нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю). Такі дії називають прямим ходом. З отриманої трикутної системи невідомі змінні визначають за допомогою послідовних підстановок (зворотний хід).

Для виконання прямого ходу здійснюють такі перетворення:

- 1) множать або ділять коефіцієнти і вільні члени на одне й те саме число;
- 2) додають і віднімають рівняння;
- 3) переставляють рівняння системи;
- 4) виключають із системи рівняння, в яких усі коефіцієнти при невідомих та вільні члени дорівнюють нулю;

За допомогою операцій 1) і 2) можна виключити будь-яке невідоме з усіх рівнянь системи, крім одного. При цьому невідоме, яке виключають, називають *провідним невідомим*, а рівняння, в якому зберігаються провідне невідоме, - *провідним*.

Приклад 1. Розв'язати методом Гауса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

За провідне рівняння виберемо друге рівняння, а за провідне невідоме виберемо x_1 . Переставимо друге рівняння на місце першого:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Запишемо матрицю, яка складається з коефіцієнтів системи і стовпця вільних членів. Таку матрицю називають *розширеною матрицею системи*. Стовпець вільних членів відокремлюємо від матриці коефіцієнтів а системою вертикальною рисою:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}$$

Для того, щоб дістати у першому стовпці $a_{21}=a_{31}=0$, помножимо перший рядок спочатку на -4 і додамо до другого рядка, а потім на -2 і додамо до третього рядка

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}$$

Поділимо другий рядок на -10 , отримані результати помножимо на 7 і додамо до третього рядка

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0,7 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1,9 & 3,8 \end{array}$$

Запишемо нову рівносильну систему, яка відповідає отриманій розширеній матриці

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 0,7x_3 = 0,4 \\ 1,9x_3 = 3,8 \end{array}$$

Виконуючи зворотний хід, за допомогою послідовних підстановок знаходимо

$$\begin{array}{l} 1,9x_3 = 3,8; \quad x_3 = 2 \\ x_2 + 0,7 \cdot 2 = 0,4; \quad x_2 = -1 \\ x_1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 2; \quad x_1 = 1 \end{array}$$

Отже, дістали відповідь $(1; -1; 2)$

Метод Крамера

Розв'язування системи лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \quad (1)$$

Нехай $a_{22} \neq 0$. Тоді система (1) рівносильна системі

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} \end{array} \quad (2)$$

Друге рівняння системи (2) помножимо на a_{12} і віднімемо почленно від першого рівняння. Дістанемо

$$(a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot a_{12}) \cdot x_1 = b_1 - b_2 \cdot \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (3)$$

Якщо $a_{11} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot a_{12} \neq 0$, тобто $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, то

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad (4)$$

Підставивши це значення x_1 у друге рівняння системи (2), дістанемо

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \quad (5)$$

Неважко помітити, що формули (4) і (5) можна записати за допомогою визначників другого порядку:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

або

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (6)$$

де

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

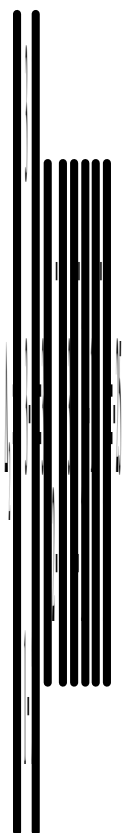
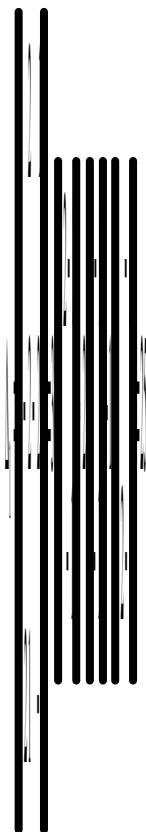
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи і визначники при невідомих:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-2-1) - 2(-5-2) + 1(5+2) = -9 + 14 + 7 = 12$$





знаходимо значення x_1, x_2, x_3 за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2,$$

Розглянемо випадок, коли визначник системи дорівнює нулю. Тут можливі 2 варіанти:

1. Визначник $\Delta = 0$ і кожний визначник $\Delta_k = 0 (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ є пропорційними. При цьому система має нескінченну кількість розв'язків.
2. Визначник $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_k \neq 0$. Це має місце тоді, коли коефіцієнти при всіх невідомих, за виключенням x_k є пропорційними. При цьому система розв'язків не має.

Завдання

Розв'язати системи лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса

$$1 \begin{cases} x + y - z = 36 \\ x + z - y = 13 \\ y + z - x = 7 \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 & \begin{cases} 2x - 3z = -17 \\ 6x - 5z = 7 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 & \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 & \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 46 \\ x + 2y + z = 8 \\ x - 7y - 2z = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17 & \begin{cases} 2x + y + 5z = 27 \\ 5x + 2y + 13z = 70 \\ 3x - z = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 & \begin{cases} 4x + y - 3z = -1 \\ 8x + 3y - 6z = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18 & \begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ 3x - 5y - 6z = -21 \\ 3x + y + z = -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 & \begin{cases} 4x - 3y + z = 43 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19 & \begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ 5x - 3y + 2z = -4 \\ 4x - 2y - 3z = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 & \begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \\ x - 5y - 8z = 23 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 & \begin{cases} 5x + 6y - 2z = 12 \\ 2x + 5y - 3z = 9 \\ 4x - 3y + 2z = -15 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 & \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15 \\ x + y + 5z = 16 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21 & \begin{cases} 12x - 13y - 4z = -10 \\ 7x - 9y - 11z = 0 \\ 2x - 17y - 15z = -7 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 & \begin{cases} 5x - 19y - z = 26 \\ 2x - 5y - z = 6 \\ 8x - 31y - 4z = 35 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22 & \begin{cases} 8x - y + 3z = 22 \\ 4x + y + 6z = -1 \\ 13x + y + 16z = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 & \begin{cases} 6x + 3y - 5z = 0 \\ 9x + 4y - 7z = 3 \\ 14x + 6y - 11z = 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23 & \begin{cases} 7x - 2y = -24 \\ 6x - 4y - 5z = -37 \\ 4x + 3y + 6z = 13 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 & \begin{cases} -5y + z = 23 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ x + 6y - 2z = -21 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24 & \begin{cases} 5x - 5y - 4z = -3 \\ x - y + 5z = 11 \\ 4x - 3y - 6z = -9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 & \begin{cases} 5x - 9y - 14z = 6 \\ x + 7y + 5z = 11 \\ 5x - 21y - 27z = -5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 & \begin{cases} 13x + 2z = -37 \\ 2x - 8y + 5z = 15 \\ 19x - 11y + 9z = -26 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13 & \begin{cases} 4x - 7y - 2z = 0 \\ x - 3y - 4z = 16 \\ 3x - 8y - 7z = 22 \end{cases} \end{cases}$$

Запитання для самоперевірки:

1. Що ми називаємо розв'язком системи 3 лінійних рівнянь з 3 невідомими?
2. В чому полягає метод Гауса?
3. Запишіть формули Крамера для розв'язання системи 3 лінійних рівнянь з 3 невідомими?
4. Коли система не має розв'язків?

Змістовий модуль 2 Комплексні числа

Мета даної теми - створення математичного апарату, придатного для розрахунків ланцюгів змінного струму та розв'язування інших задач електротехніки.

При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Розширення поняття множини дійсних чисел. Поняття про комплексне число. Алгебраїчна форма комплексного числа. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Застосування комплексних чисел в електротехнічних розрахунках.

Теми для реферату:

Застосування комплексних чисел в електротехнічних розрахунках.

Запитання для самоперевірки

1. Як записати комплексне число в показниковій формі?
2. Як можна геометрично інтерпретувати комплексні числа?
3. Як виконати дії з комплексними числами в показниковій формі ?

Змістовий модуль 3 Похідна та її застосування

Метою даної теми є систематизація та розширення уявлень студентів про роль похідної при моделюванні процесів і явищ, характерних для спеціальної підготовки.

При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Границя функції неперервного аргументу, властивості границь; неперервність функції в точці та на відрізку.

Похідна, її геометричний та фізичний зміст; диференціювання функцій, заданих аналітично, неявно, параметрично.

Друга похідна, її фізичний зміст; похідні вищих порядків.

Диференціал функції та його застосування.

Теорема про середнє. Формула Тейлора.

Дослідження функції із застосуванням похідної (монотонність,

екстремум, опуклість, точку перегину, асимптоти).
Використання похідної при розв'язанні оптимізаційних задач.

Теми, які виносяться на самостійне вивчення

1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Границя функції при $x \rightarrow \pm\infty$.

Означення: Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то функція $f(x)$ називається *нескінченно великою при $x \rightarrow a$* .

Якщо ж $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функція $f(x)$ називається *нескінченно малою при $x \rightarrow a$* .

Аналогічно визначаються нескінченно великі і нескінченно малі функції при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

Зауважимо, що має місце наступне твердження: якщо функція $f(x)$ – нескінченно мала при $x \rightarrow a$ і $f(x) \neq 0$ для $x \neq a$ з деякого околу точки a , то функція $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно велика при $x \rightarrow a$.

Наприклад, функція $f(x) = x$ є нескінченно мала при $x \rightarrow 0$ і нескінченно велика при $x \rightarrow -\infty$ і при $x \rightarrow +\infty$.

Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x \rightarrow +\infty$ і при $x \rightarrow -\infty$ і нескінченно великою при $x \rightarrow 0$ (аналогічно при $x \rightarrow +0$ і при $x \rightarrow -0$).

Границя функції при $x \rightarrow \pm\infty$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій. Число B називається *границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$* , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$ для будь-якої послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

В цьому випадку пишуть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$. Аналогічно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C$, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = C$ для будь-якої (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$.

Крім розглянутого випадку скінченної границі функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$ (або $x \rightarrow \pm\infty$) використовується поняття нескінченної границі. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$, визначена для всіх $x \neq 0$, приймає дуже великі значення при $x \rightarrow 0$. В такому випадку говорять, що функція в точці $x = 0$ має свою границею нескінченність, і пишуть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Запишемо означення нескінченної границі: якщо для будь-якої послідовності значень аргументу (x_n) такої, що $x_n \neq a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ має місце $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, то кажуть, що *границя функції $f(x)$ в точці a є нескінченність* пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Якщо в даному означенні умову $x_n \neq a$ замінити на умову $x_n < a$ (або $x_n > a$), то отримаємо означення нескінченної лівої границі (відповідно правої границі) функції $f(x)$ в точці a .

Аналогічно визначаються нескінченні границі на нескінченності, тобто границі виду $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$.

Приклад 1. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 4}{14 - x^2 - x^3}$.

Разділимо чисельник і знаменник на x^3 , тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 4}{14 - x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{14}{x^3} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Зауваження. В прикладах при $x \rightarrow +\infty$ чисельник і знаменник прямують до нескінченності. В таких випадках кажуть, що маємо неозначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад 2. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

Зауваження В прикладі 2 розглянуто неозначеність виду $\infty - \infty$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити границі.

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 3x}{2x + 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 5x - 6}{7x^2 - 8x - 9}$

3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x - 1)^3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x^2 + 5}{4x^2 - 9}$

5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 8}{3 - x + 10x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 5x - 2}{3 - 2x^2 + 6x}$

7. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x - 3 - x^2}{2x^2 + 5x + 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x + 2)^2}{1 - x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x - 1)^3}{2x - 5x^3}$

10. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x - 21}$

11. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 11}{5x - 8x^2 + 10x^3}$

12. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 + x - 2}$

13. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x - 1)^2 - (x + 2)^2}{5x - 1}$

14. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 8}{x + 3}$

15. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 8}{3 - x + 10x^2}$

16. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2} - x}{4x + 11}$

17. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 7}{x^2 - 3x - 5}$

18. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x + 3)^2}{2x^2 + 3x - 1}$

19. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 5x + 2x^2}{2x + 8x^2}$

20. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2 + 3}{4x^2 + 5}$

2 Диференціал функції та його застосування.

З поняттям похідної тісно пов'язане важливе поняття математики - поняття диференціалу.

Нехай дана функція $y = f(x)$, диференційована в точці x . Це означає, що існує

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Отже, справедливе співвідношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \text{де } \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Звідси: $\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x$.

Як видно, приріст функції складається з двох доданків. Другий доданок $\alpha \Delta x$, як добуток нескінченно малих величин, є нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δx . Значить, при малих Δx другий доданок менш важливий, ніж перший, і саме перший доданок складатиме основну частину приросту функції (головну частину).

Диференціалом функції в точці x називають головну частину

приросту функції Δy і позначають символом dy . За означенням $dy = f'(x) \Delta x$.

При $f(x) = x$, отримаємо, $dx = 1 \cdot \Delta x$, або $dx = \Delta x$, тобто диференціал аргументу рівний його приросту. Тоді $dy = y' \Delta x = y' dx$ тобто диференціал функції $y = f(x)$ в точці x дорівнює добутку похідної в цій точці на диференціал аргументу.

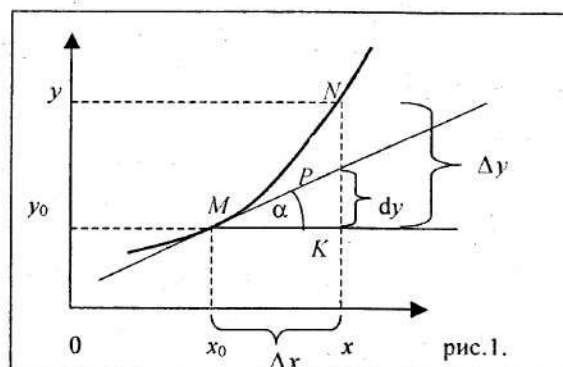
Звідси, і вираз, який ми раніше позначали одним символом, Тепер можна розглядати $y' = \frac{dy}{dx}$ як дріб, рівний відношенню диференціалу функції до диференціалу аргументу.

Геометричний зміст диференціалу.

Розглянемо графік неперервної функції $y = f(x)$ (рис 1)

Похідна функції при $x = x_0$ рівна тангенсу кута нахилу дотичної до графіку функції в точці з абсцисою x_0 , тобто:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



З рис. 1 видно, що дотична розбиває приріст функції KN на два відрізки: KP , який відповідає доданку $y' \cdot \Delta x$ та PN , який рівний доданку $\alpha \cdot \Delta x$. Якщо приріст

аргументу прямує до нуля, то відрізок NP зменшується значно швидше, ніж відрізок PK . Отже, приріст ординати дотичної PK є головною частиною приросту функції $y=f(x)$. З трикутника MPK знаходимо:

$$PK = MK \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Тому, що $MN = \Delta x$; $\operatorname{tg} \alpha = y'$, отримаємо $PK = y' \cdot \Delta x = dy$.

Отже, диференціал функції $y=f(x)$ геометрично зображається приростом ординати дотичної, проведеної в точці $M(x_0, y_0)$ при заданих значеннях x_0 і Δx .

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y=(2x^3-4)^2$.

Розв'язання: Знаходимо похідну даної функції:

$$y' = 2(2x^3 - 4)^1 (2x^3 - 4)' = 2(2x^3 - 4)^1 6x^2 = 30x^2(2x^3 - 4)^1$$

Помножимо похідну на диференціал аргументу, отримаємо диференціал функції:

$$dy = 30x^2(2x^3 - 4)^1 dx.$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції

$$S = \frac{1}{\ln^2 t}.$$

Розв'язання: Спочатку знайдемо похідну даної функції

$$S' = \frac{(\ln^2 t)'}{(\ln^2 t)^2} = -\frac{2 \ln t (\ln t)'}{\ln^4 t} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{t}}{\ln^3 t} = \frac{-2}{t \ln^3 t}.$$

Помножимо похідну на диференціал аргументу, отримаємо диференціал функції:

$$dS = \frac{-2 dt}{t \ln^3 t}.$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Приріст функції і диференціал функції відрізняються один від одного на малу величину $\alpha = \Delta x$. Якщо знехтувати цією малою величиною, то отримаємо наближену рівність

$$\Delta y \approx dy,$$

тобто при малих приростах аргументу Δx приріст функції можна замінити її диференціалом.

Враховуючи, що $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, отримаємо $f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$,

Звідки $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$

Ці наближені рівності застосовуються для наближених обчислень, бо обчислення диференціалу функції значно простіше, ніж обчислення її приросту.

Приклад 1. Обчислити наближене значення приросту функції $y=x^2+2x+5$ при зміні аргументу від $x=2$ до $x=2,001$.

Розв'язання: Знаходимо диференціал аргументу $dx = \Delta x = 2,001 - 2 = 0,001$. Приріст аргументу малий, тому приріст функції Δx наближено дорівнює його диференціалу dy .

Диференціал функції обчислюємо за формулою: $dy = y'(x)dx$ Спочатку знайдемо похідну функції і її значення при $x=2$. $dy = y'(x)dx$.

$$y' = 2x + 2,$$

$$y'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

Тоді:

$$dy = 6 \cdot 0,001 = 0,006;$$

$$\Delta y \approx 0,006$$

Точне значення приросту функції знайдемо за формулою:

$$\Delta y = f(2,001) - f(2),$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 13, \quad f(2,001) = (2,001)^2 + 2 \cdot 2,001 + 5 = 13,006001$$

$$\Delta y = 13,006001 - 13 = 0,006001$$

Тоді порівнюючи отриманий результат з диференціалом dy , бачимо, що абсолютна похибка дорівнює 0,000 001. Проте абсолютна похибка не дає достатньо повної характеристики точності підрахунку, тому обчислимо і відносну похибку:

$$\omega = \frac{0,000001}{0,006001} < 0,02\%$$

Така точність майже завжди достатня для прикладних розрахунків, тому замість приросту функції знаходять її диференціал.

Приклад 2. Обчислити наближене значення функції:

$$\sqrt{16,06}$$

Розв'язання: Нам потрібно знайти наближене значення функції $y = \sqrt{x}$ при $x = 16,06$

Знайдемо диференціал аргументу

$$dx = \Delta x = 16,06 - 16 = 0,06.$$

$$f(16,06) \approx f(16) + dy, \quad f(16) = \sqrt{16} = 4.$$

Диференціал знаходимо за формулою: $dy = y'(x)dx$, для цього спочатку знайдемо похідну функції і її значення при $x = 16$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Тоді: $dy = 0,125 \cdot 0,06 = 0,0075$

Звідси

$$\sqrt{16,06} \approx 4 + 0,0075 = 4,0075$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити наближене значення виразу $\sqrt[n]{26,9n}$, де n - номер варіанту

Теми для реферату

Використання похідної при дослідженні функцій та розв'язанні оптимізаційних задач.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення другої похідної функції
2. В чому полягає фізичний зміст другої похідної функції?
3. За яким правилом знаходять диференціал функції?
4. Як застосовують диференціал функції в наближених обчисленнях?

Змістовий модуль 4. Інтеграл та його застосування

Метою даної теми є систематизація та розширення уявлень студентів про роль інтеграла при моделюванні процесів і явищ, характерних для спеціальної підготовки.

При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Невизначений інтеграл та його властивості, методи обчислення невизначеного інтеграла.

Розв'язування задач, які приводять до поняття визначеного інтеграла.

Властивості визначеного інтеграла та методи його обчислення.

Обчислення площ плоских фігур.

Застосування інтеграла до рішення фізичних задач.

Наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою ЕОМ.

Теми, які виносяться на самостійне вивчення

1. Наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою ЕОМ.

В тих випадках, коли обчислити визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца неможливо або важко, використовують методи наближеного інтегрування. При достатньо малому відрізку $[a; b]$ площа S криволінійної трапеції наближено рівна площі прямокутника («лівого» прямокутника рис.4а, та «правого» прямокутника рис.4в), трапеції (рис.5) або параболи (рис.6)

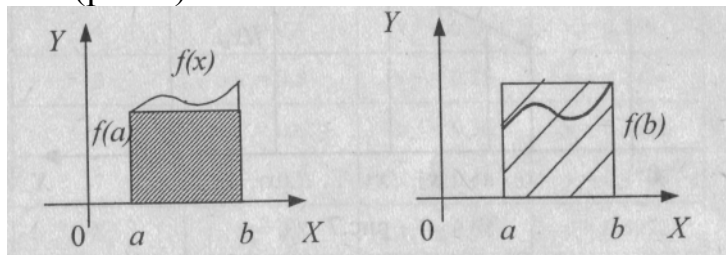


Рис.4а

Рис.4в

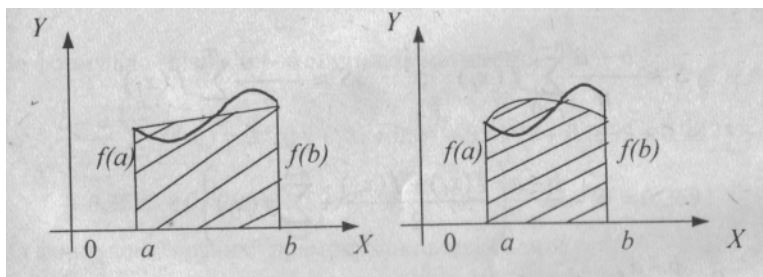


Рис.5

Рис. 6

Запишемо наступні наближені рівності:

$$S \approx (b - a) \cdot f(a) \quad \text{рис.4а};$$

$$S \approx (b - a) \cdot f(b) \quad \text{рис.4в}$$

$$S \approx (b - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{2} \right) \quad (\text{рис.5});$$

$$S \approx \frac{b - a}{b} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (\text{рис.6}).$$

Щоб добитися більшої точності при знаходженні площі S , проміжок від a до b розбивають на n рівних частин (рис. 7) (при наближенні параболою проміжок розбивають на $2n$ частин).

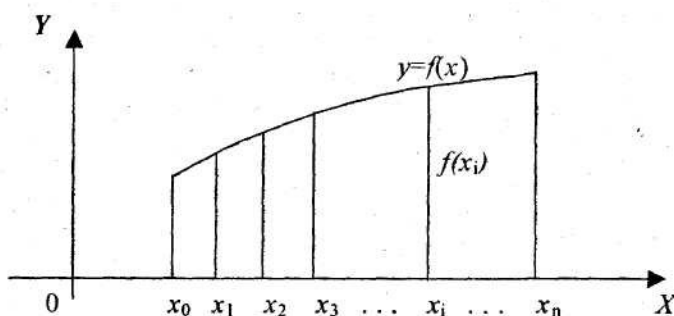


Рис.7

Якщо для кожної із маленьких дуг використати попередні наближення, то для всієї площі S отримаємо наближене значення представлене у вигляді суми площ криволінійних трапецій

$$S \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad ; \quad S \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad ;$$

$$S \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad ;$$

$$S \approx \frac{b-a}{2} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})) \quad .$$

Перші дві формули носять назви формул "лівих" та "правих" прямокутників відповідно, третя - формули трапеції, а остання - формули Сімпсона.

Наближене обчислення визначеного інтеграла за допомогою ЕОМ.

Наближені обчислення визначеного інтеграла можна проводити за допомогою електронної таблиці Excel

Приклад: Протабулювати функцію $y = (\sin x^2 + 1)$ та обчислити площу під

кривою методом лівих прямокутників. Відрізок, на якому розглядати функцію, і крок табулювання H задати самостійно (у таблиці повинно бути 10-12 рядків)

	A	B	C	D	E	F
1	Табулювання функції та обчислення					
2	площі під кривою					
3	$y = \sin(x^2) + 1, 0 \leq x \leq 5, h = 0,5$					
4				0,5	У клітинку B6 заносимо формулу $=\sin(x^2)+1$	
5	x	y	Площа			
6	0	1,00	0,500		У C6 заносимо формулу $=h*y$	
7	0,5	1,25	0,624		В A7 є формула $=A6+h$	
8	1	1,84	0,921			
9	1,5	1,78	0,889			
10	2	0,24	0,122			
11	2,5	0,97	0,483			
12	3	1,41	0,706			
13	3,5	0,69	0,344			
14	4	0,71	0,356			
15	4,5	1,99	0,993			
16	5	0,87				
17			5,938		Автосума дає шукану площу	

Вводимо вхідні дані розв'язування задачі так:

Адреси Дані

A1 Табулювання функції та обчислення

A2 площі під кривою

A3 <тут бажано вказати свою функцію, межі, крок>

A5 x

B5 y

C5 Площа .

Задамо режим «Допускати назви діапазонів».

Сервіс => Параметри => Закладка Обчислення.

Вводимо у клітинку D4 значення кроку і дамо клітинці ім'я Н. Введіть число і виберіть цю клітинку. Застосуйте команду Вставити => Ім'я => Присвоїти => Введіть Н => Додати => ОК.

Вводимо формули розв'язування задачі так :

Адреси Формули

Примітки

A6 0 Значення лівої межі задайте своє

B6 $= (\sin x^2 + 1)$ Це формула обчислення значення функції

C6 $= H * y$ Обчислено площу одного лівого прямокутника

A7 $= A6 + H$

Скопіюємо формули з клітинок A7, B6, C7 вниз до кінця робочої таблиці — отримаємо площі всіх лівих прямокутників у стовпці C.

У стовпці C вилучіть останнє значення.

Щоб отримати площу під всією кривою, обчисліть суму площ всіх лівих прямокутників.

Клацніть під стовпцем C і застосуйте команду кнопку Авто Сума. Яке значення площі отримано?

Для отримання точнішого значення площі значення кроку H потрібно зменшувати. Уменшіть значення H удвічі й обчисліть площу під кривою на тому ж самому проміжку.

Завдання для самостійної роботи

Протабулювати функцію $y=n(\cos nx^3+5)$, де n - номер варіанту і обчислити площу під кривою методом лівих прямокутників на відрізьку $[0;6]$ і $H=0,3$

Питання для самоперевірки

1. Які ви знаєте наближені методи обчислення визначених інтегралів?

Змістовий модуль 5 Диференціальні рівняння

Мета даної теми – продовжити ознайомлення студентів із місцем диференціальних рівнянь при дослідженні реальних процесів і явищ, поглиблення навичок моделювання за допомогою диференціальних рівнянь процесів та явищ, характерних для спеціальної підготовки.

При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Диференціальні моделі процесів зростання та вирівнювання.

Нескладні задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Задача Коші.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальні рівняння другого порядку.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Теми, які виносяться на самостійне вивчення

1. Диференціальні моделі процесів зростання та вирівнювання. Нескладні задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь.

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію з рівняння, яке містить поряд з цією невідомою функцією її похідні.

Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається **диференціальним**

Порядок найвищої похідної, яка входить до диференціального рівняння, називається його порядком. Наприклад, рівняння $y'' + 4y = 0$ є диференціальним рівнянням другого порядку.

Якщо до рівняння входить незалежна змінна, невідома функція та її похідна, то це рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо, крім того, в рівняння входить похідна другого порядку від шуканої функції, то рівняння називається диференціальним рівнянням другого порядку і т. д.

Будь-яку функцію, що задовольняє диференціальне рівняння, називають розв'язком, або інтегралом цього рівняння, а розв'язування диференціального рівняння — інтегруванням. Наприклад, функція $y = e^x$ є розв'язком диференціального рівняння $y - y' = 0$, бо $(e^x)' = e^x$.

Функція $y = \cos x$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$.

Справді, для функції $y = \cos x$, маємо: $y'' = -\cos x$. Підставляючи значення y'' і y у рівняння $y'' + y = 0$, дістанемо:

$$-\cos x + \cos x = 0.$$

Аналогічно можна переконатися, що функція $y = A \sin x + B \cos x$, де A і B — довільні сталі, також є розв'язком даного рівняння.

Загальним розв'язком даного диференціального рівняння називається розв'язок (якщо він існує), у якого число довільних сталих дорівнює порядкові рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння при певних значеннях довільних сталих називається окремим розв'язком цього диференціального рівняння.

Так, у розглянутому вище прикладі $y'' + y = 0$ розв'язок $y = A \sin x + B \cos x$ є загальним, а розв'язок $y = \cos x$ — окремим.

На практиці здебільшого окремий розв'язок конкретного диференціального рівняння знаходять із загального розв'язку, виходячи з деяких умов, яким має задовольняти шуканий окремий розв'язок. Умови, яким має задовольняти окремий розв'язок даного диференціального рівняння, називають початковими умовами.

Задача відшукування конкретного окремого розв'язку даного диференціального рівняння за початковими умовами називається задачею Коші.

Приклад. Знайти окремий розв'язок диференціального рівняння $yy' + x = 0$, (1)

яке задовольняє початковим умовам: $y = 4$, $x = 3$, якщо загальний розв'язок даного рівняння задано у вигляді

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (2)$$

Розв'язання. Підставивши в загальний розв'язок (2) початкові умови,

дістанемо значення довільної сталої $3^2 + 4^2 = a^2$. Звідси $a = \pm 5$. Отже, шуканий окремий розв'язок диференціального рівняння (1) для заданих початкових умов є функція y , задана рівнянням $x^2 + y^2 = 25$.

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку рівняння (1).

Оскільки кожний окремий розв'язок даного рівняння є деякою функцією однієї змінної, то в прямокутній системі координат на площині цьому розв'язку відповідає деяка лінія. Ця лінія називається інтегральною кривою даного диференціального рівняння. Загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає множина всіх інтегральних кривих цього рівняння, яка називається сім'єю інтегральних кривих диференціального рівняння.

Ми встановили, що окремим розв'язком рівняння $yy' + x = 0$ при початкових умовах $x=3$ і $y=4$ є крива $x^2 + y^2 = 25$, а загальним розв'язком $x^2 + y^2 = a^2$.

У системі координат на площині загальний розв'язок рівняння задає множину концентричних кіл з центром у початку координат. Початкові умови означають, що серед цієї множини кіл треба взяти те, яке проходить через точку з координатами $x = 3$, $y = 4$. Це коло з радіусом 5, тобто $x^2 + y^2 = 25$.

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь — складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв'язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію y вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. У цих випадках знаходять наближені розв'язки за допомогою ЕОМ. Диференціальні рівняння досить просто і повно описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1 (розмноження бактерій). На дослідах встановлено, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості (якщо для них вистачає їжі).

Вважають, що з часом маса бактерій змінюється неперервно (бо самі бактерії дуже малі, а їх кількість велика).

Тоді швидкість приросту маси бактерій називається швидкістю розмноження. Нехай $x(t)$ — маса всіх бактерій на момент часу t . Тоді $x'(t)$ є швидкістю розмноження, яка пропорційна кількості бактерій. Існує таке k , що

$$x'(t) = kx. \quad (1)$$

За умовою, $x(t)$ і $x'(t)$ — невід'ємні. Розглянемо лише випадок, коли $k > 0$, бо якщо $k = 0$, то ніякого розмноження не відбувається.

Неважко перевірити, що будь-яка функція

$$x = Ce^{kt} \quad (2)$$

де C — деяка стала, є розв'язком рівняння (1).

Справді,

$$x'(t) = (Ce^{kt})' = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kx.$$

Функція $x = Ce^{kt}$ є загальним розв'язком рівняння (1).

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій і від зовнішніх умов. Якщо відомі значення коефіцієнта k і маса бактерій у деякий момент часу t_0 , то за формулою (2) знайдемо масу бактерій у будь-який момент часу t .

Розв'язування багатьох задач у фізиці, техніці й біології, соціальних науках зводиться до математичної задачі знаходження функції f , яка задовольняє рівняння

$$f'(x) = kf(x) \quad (3)$$

де k — деяка константа.

За властивостями похідної показникової функції знаходимо, що розв'язком рівняння (1) буде будь-яка функція виду

$$F(x) = Ce^{kx}, \quad (4)$$

де C — стала. Оскільки C — довільне, то розв'язків диференціального рівняння (1) нескінченно багато. Доведено, що інших розв'язків, крім функцій виду (2), рівняння (1) не має.

Приклад 2 (рівняння механічного руху).

Нехай матеріальна точка, маса якої дорівнює m , рухається під дією сили F уздовж осі Ox . Позначимо через t — час її руху, v — швидкість, a — прискорення. Другий закон Ньютона $a = \frac{F}{m}$ матиме вигляд диференціального рівняння, якщо записати прискорення як другу похідну: $a = x''(t)$.

Рівняння $mx''(t) = F$ називають рівнянням механічного руху, де $x(t)$ — невідома функція, m і F — відомі величини.

Залежно від умов задач по-різному записуються різні диференціальні рівняння. Наприклад:

а) сила F стала ($F = \text{const}$), тоді рівняння руху має вигляд

$$x''(t) = \frac{F}{m} = a \quad (\text{де } a = \text{const});$$

б) сила періодично змінюється з часом, наприклад за законом $F = F_0 \sin \omega t$.

Тоді рівнянням руху є $x''(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$;

в) сила пропорційна зміщенню (рух ідеально пружної пружини): $F = -kx$, $k > 0$ (знак «мінус» вказує на те, що напрям сили протилежний напрямку зміщення). Маємо таке рівняння руху: $x''(t) = -\frac{k}{m}x$

г) сила обернено пропорційна квадрату відстані (вільний політ). Тоді рівняння руху має вигляд $x''(t) = -\frac{k}{x^2}$.

Приклад 3 (диференціальне рівняння радіоактивного розпаду).

Нехай у початковий момент часу маса радіоактивної речовини дорівнює $m(0) = m_0$.

Відомо, що швидкість зменшення маси речовини $m(t)$ з часом пропорційна її кількості, тобто виконується рівняння

$$m'(t) = -km(t), \quad \text{де } k > 0. \quad (6)$$

Скористаємося встановленою залежністю $m(t) = Ce^{-kt}$.

Константу C знаходимо з умови (5). Маємо:

$$m(0) = Ce^0, \quad \text{тобто } C = m(0) = m_0. \quad \text{Звідси } m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Нагадаємо, що інтервал часу T , протягом якого кількість радіоактивних ядер зменшується вдвічі, називають періодом напіврозпаду цієї речовини.

Отже, k і T пов'язані рівнянням

$e^{-kT} = \frac{1}{2}$, з якого дістанемо: $e^{kT} = 2$, $kT = \ln 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. Для Радіо Т ≈ 1550 років, тому $k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0.000447$. Через мільйон років від початкової маси Радіо m_0 залишиться $m(10^6) = m_0 e^{-447} \approx 0,6 \cdot 10^{-194} m_0$.

Приклад 4 (рівняння гармонічних коливань).

Розглянемо рівняння

$$x'' + w^2 x = 0, \quad (7)$$

де w — деяке додатне число.

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція

$$x = A \cos(wt + \alpha) \quad (8)$$

для будь-яких сталих A і α є розв'язком рівняння (7). Можна показати, що інших розв'язків рівняння (7) не має. Таким чином, функція (8) задає загальний розв'язок рівняння (7).

Функція (8) для будь-яких заданих A , w і α описує гармонічний коливальний процес. Число $|A|$ називається амплітудою, а число α — початковою фазою, або фазою коливання (8). Рівняння (7) називають рівнянням гармонічних коливань. Додатне число w називають частотою коливання.

Кількість коливань за одиницю часу визначають за формулою $\nu = \frac{w}{2\pi}$.

Як бачимо, загальний розв'язок (8) рівняння (7) містить дві довільні сталі: амплітуду A і початкову фазу α . Для їх визначення слід задати дві умови, наприклад,

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \quad (9)$$

Тоді для визначення сталих A і α дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} A \cos(wt_0 + \alpha) = x_0, \\ A w \sin(wt_0 + \alpha) = v_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{Звідси } A^2 \cos^2(wt_0 + \alpha) + A^2 \sin^2(wt_0 + \alpha) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2},$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}.$$

$$\text{Можна вважати, що } A > 0, \text{ тоді } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}}.$$

Знаючи амплітуду A , із системи (10) за формулами тригонометрії визначають початкову фазу α .

З формули (8) можна дістати інший вигляд загального розв'язку рівняння (7).

Справді, $x = A(\cos wt \cos \alpha - \sin wt \sin \alpha) = A \cos \alpha \cos wt - A \sin \alpha \sin wt$. Поклавши $C_1 = A \cos \alpha$, $C_2 = -A \sin \alpha$, дістанемо: $x = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt$.

До такого диференціального рівняння приводять, наприклад, дві різні, на перший погляд, задачі фізики — коливання пружної пружини і розрядження конденсатора через котушку.

Зазначимо, що рівняння гармонічних коливань розглянуто нами за умов, які реально не виконуються. Так, описуючи коливання пружини, треба враховувати тертя, а описуючи розрядження конденсатора — внутрішній опір. При цьому в рівнянні коливань з'являється доданок, що залежить від першої похідної (швидкості).

Завдання для самостійної роботи

1. Перевірити, чи є розв'язком даного диференціального рівняння записана поряд з ними функція:

а) $y'' + 2y' - xy = 0, y = C_1 e^x + C_2 e^{-x};$

б) $y'' - 2y' + y = 0, y = x^4.$

2) Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1. \quad y' = 4 - 3x$$

$$2. \quad y' = x^2 - 5x + 6$$

$$3. \quad y' = 5e^{2x}$$

$$4.$$

$$y' = \cos x + \sin x$$

$$5. \quad y' = 5 \cos 3x$$

$$6. \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$7. \quad y' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$8. \quad y' = (2 - x)^2$$

$$9.$$

$$y' = (-x + 5 - 3x^2)$$

$$10. \quad y' = \sqrt{2} \cos x$$

$$11. \quad y' = 2\sqrt{x} - x^2$$

$$12. \quad y' = e^x + x$$

$$13. \quad y' = \frac{x - 1}{x^3}$$

$$14. \quad y' = \frac{1}{3 \sin^2 x}$$

$$15. \quad y' = \frac{1 + x^2}{x^6}$$

$$16. \quad y' = (\sqrt{x} - 2)$$

$$17. \quad y' = e^x + x^2$$

$$18. \quad y' = (1 + x)^2$$

$$19. \quad y' = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

$$20. \quad y' = x^3 + 2x$$

$$21.$$

$$y' = 3 - x + 6x^2$$

$$22. \quad y' = 1 + \sqrt{3x^2}$$

$$23.$$

$$y' = (2x + 7 - 3x^2)$$

$$24.$$

$$y' = (x + 4 - 5x^2)$$

$$25. \quad y' = 4e^x + 6x^2$$

$$26. \quad y' = 2 \cos 7x$$

$$27.$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$28. \quad y' = (2 + 3x)^2$$

$$29.$$

$$y' = 7 \cos x + 2 \sin x$$

$$30.$$

$$y' = 4 \cos x + \sin 2x$$

Теми для реферату

1. Диференціальні рівняння в техніці.
2. Використання диференціальних рівнянь для опису перехідних процесів у електричних колах.

Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
1. Що називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння?
3. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
4. Що таке окремий розв'язок диференціального рівняння?
5. Навести приклади диференціальних рівнянь, які описують реальні фізичні й біологічні процеси.

Змістовий модуль 6. Ряди

Метою вивчення даної теми є формування уявлень студентів про числовий ряд. При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Числовий ряд та його сума. ознаки збіжності рядів. Основні властивості збіжних рядів. Знакододатні та знакозмінні ряди, ознаки їх збіжності.

1. Дослідження знакозмінних рядів на збіжності. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Дослідження числових рядів на збіжність.

Рядом в математиці називають вираз виду

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

де $a_1, a_2, a_3, \dots$ — члени деякої нескінченної послідовності. Член a_n називають загальним членом ряду.

Три крапки в кінці виразу вказують, що останнього доданку немає, тобто ряд є нескінченною сумою.

Якщо $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — числа, то ряд називають числовим. В залежності від знаку чисел ряди можуть бути знакопостійними та знакозмінними (знакопозначними).

Наприклад, ряди:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots , \\ &2 + 4 + \dots + 2n + \dots , \\ &- 1 - 3 - 5 - \dots - (2n - 1) - \dots . \end{aligned}$$

є знакопостійними, а ряди

$$\begin{aligned} &1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots , \\ &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots \end{aligned}$$

є знакозмінними (знакопосередженими).

Знайти суму нескінченної кількості доданків безпосереднім додаванням не може ні людина, ні ЕОМ. Знайти можна лише суму скінченного числа доданків. Такі суми називають частковими сумами ряду. Наприклад,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

А чи може існувати сума нескінченної кількості доданків? Розглянемо приклад: знайти суму ряду

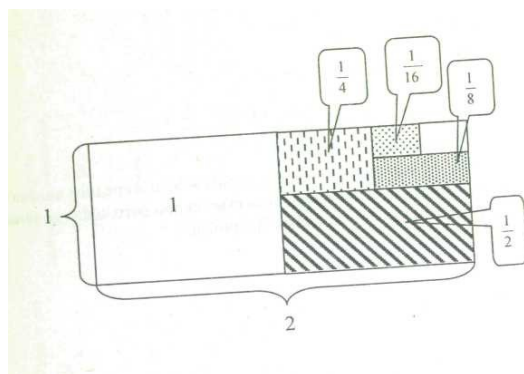
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Обчислимо часткові суми цього ряду:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \\ S_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}. \end{aligned}$$

Бачимо, що чим більша кількість доданків, тим ближче S_n наближається до числа 2. Даний приклад легко проілюструвати геометрично (рис. 1).

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 \cdot 2 = 2.$$



Не для кожного ряду послідовність часткових сум при $n \rightarrow \infty$ наближається до конкретного числа.

Наприклад, для ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots,$$

часткові суми S_n рівні або 0, або 1; для ряду

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots,$$

часткова сума $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Ряд, для якого існує границя послідовності часткових сум при $n \rightarrow \infty$ називають **збіжним рядом**, а число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ - **сумою ряду**. Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд називають **розбіжним** і йому не приписують

жодного числового значення.

При дослідженні рядів основними є два питання: чи буде даний ряд збіжним і чому буде дорівнювати сума ряду. В багатьох практичних задачах принциповим є перше питання. Тому основну увагу приділимо питанню встановлення збіжності ряду.

Необхідна ознака збіжності знакопостійного ряду: Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його загальний член a_n при необмеженому зростанні n прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Приклад 1. Дано загальний член ряду: а) $b_n = \frac{n^3 + 1}{n^2}$; б) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3}$.

Написати ряд у розгорнутому вигляді і перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Розв'язання:

а) Знаходимо $b_1 = \frac{1^3 + 1}{1^2} = 2$, $b_2 = \frac{2^3 + 1}{2^2} = \frac{9}{4}$, $b_3 = \frac{3^3 + 1}{3^2} = \frac{28}{9}$, $b_4 = \frac{4^3 + 1}{4^2} = \frac{65}{16}$; тобто $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^2} = 2 + \frac{9}{4} + \frac{28}{9} + \frac{65}{16} + \dots$.

Тому, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^2} = \infty \neq 0$, то необхідна ознака збіжності не виконується, отже ряд розбіжний.

б) Знаходимо $a_1 = \frac{1^2 + 1}{1^3} = 2$, $a_2 = \frac{2^2 + 1}{2^3} = \frac{5}{8}$, $a_3 = \frac{3^2 + 1}{3^3} = \frac{10}{27}$, $a_4 = \frac{4^2 + 1}{4^3} = \frac{17}{64}$, ...

Записуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} = 2 + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \dots$.

Необхідна ознака збіжності виконується, бо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} = 0$.

Проте зробити висновок про збіжність ряду в даному випадку неможливо. Для встановлення збіжності ряду треба перевірити чи виконуються достатні умови збіжності.

Достатні умови збіжності знакопостійного ряду.

Перша ознака порівняння. Нехай дано два ряди $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n > b_n$. Тоді: а) із збіжності ряду (А) (з більшими членами) випливає збіжність ряду (В) (з меншими членами); б) із розбіжності ряду (В) випливає розбіжність ряду (А).

При застосуванні даної ознаки часто використовують ряди, збіжність яких відома. Це може бути гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (розбіжний); узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (який збіжний при $\alpha > 1$, розбіжний при $\alpha < 1$);

геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ (збіжний при $|a| < 1$).

Приклад 2. Використовуючи першу ознаку порівняння, дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

Розв'язання: Для порівняння використовуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ - збіжну

геометричну прогресію (бо $q = \frac{1}{2} < 1$). Справедлива нерівність $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, отже

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ збігається.

Друга ознака порівняння: Нехай дано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, де $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$, то обидва ряди ведуть себе однаково, тобто збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$.

Розв'язання: Тут $a_n = \frac{1}{2^n - n}$. Для порівняння використаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ з загальним членом $b_n = \frac{1}{2^n}$ - збіжну геометричну прогресію. Звідси:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$$

Тому, що $\lambda = 1$, то обидва ряди ведуть себе однаково і, значить, даний ряд збіжний.

Ознака Даламбера. Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тоді, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то при $p < 1$ ряд збіжний, при $p > 1$ ряд розбіжний; при $p = 1$ потрібно скористатися іншою ознакою.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \dots$$

Розв'язання: Тут $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, отже

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^n (n+1) n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ збіжний.

Ознака Коші: Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тоді, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, то при $p < 1$ ряд збіжний; при $p > 1$ ряд розбіжний; при $p = 1$ потрібно скористатися іншою ознакою.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3} \right)^{2n}$.

Розв'язання: Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+3} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 2^2 = 4 > 1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3} \right)^{2n}$ - розбіжний.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду (ознака Лейбніца).

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ спадають по абсолютній величині та $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд збіжний.

Для знакозмінних рядів вводять поняття **абсолютної збіжності**.

Знакозмінний (знакопосередній) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігаються одночасно даний ряд і ряд, складений з абсолютних величин його членів. Якщо ж збігається лише знакозмінний ряд, то його називають **умовно збіжним** рядом.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots;$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} - \dots$$

Розв'язання: а) Тому, що $|1| > \left| \frac{1}{2} \right| > \left| \frac{1}{3} \right| > \left| \frac{1}{4} \right| > \dots$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца.

Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right|$ розбіжний, як гармонічний і, звідси, висновок, що даний знакозмінний ряд збігається умовно.

б) Даний знакозмінний ряд збігається абсолютно, бо ряд, складений із модулів його членів: $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, є узагальнений гармонічний, який при показникові степеня більшому за одиницю збігається.

Запитання для самоперевірки

1. Які ряди називаються збіжними?
2. Що називають сумою збіжного ряду?
3. Які ряди називають розбіжними?
4. Сформулюйте ознаку Даламбера.
5. Який ряд називається знакозмінним?
6. Сформулюйте ознаку Лейбніца.
7. Який ряд називається абсолютно збіжним?
8. Який ряд називається умовно збіжним?

Завдання для самостійної роботи

1. Записати перші п'ять членів ряду по заданому загальному члену

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 1}$; | 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n + n}$; | 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2n + 5}$; |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; | 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; | 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$; |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$; | 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 1}$; | 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$; | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$; | 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$; |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + n}$; | 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$; | 25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$; |
| 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 1}$; | 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + n}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{100^n - 1}$; | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 1)^2}{4n}$; | 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2}$; |
| 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2}$; | 28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$; |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 1}$; | 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n}$; | 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2 + 1}$; |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$; | 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)}$; | 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 1}$. |

2. Записати формулу загального члена ряду:

1. $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$;

2. $\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$;

3. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$;

4. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$;

5. $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{6}{9} + \frac{8}{16} + \dots$;

6. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$;

7. $\frac{1}{3} + \frac{16}{9} + \frac{81}{27} + \frac{256}{81} + \dots$;

8. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$;

9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots$;

10. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots$;

11. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$;

12. $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots$;

13. $\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4^4} + \dots$;

14. $5 + \frac{5^2}{2^2} + \frac{5^3}{3^3} + \frac{5^4}{4^4} + \dots$;

15. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$;

16. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots$;

17. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$;

18. $6 + \frac{6^2}{2^2} + \frac{6^3}{3^3} + \frac{6^4}{4^4} + \dots$;

19. $3 + 9 + 27 + \dots$;

20. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots$;

21. $\frac{2}{6} + \frac{4}{36} + \frac{6}{216} + \dots$;

22. $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots$;

23. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$;

24. $\frac{4}{1^2} + \frac{4^2}{2^2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots$;

25. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$;

26. $8 + \frac{8^2}{2^2} + \frac{8^3}{3^3} + \frac{8^4}{4^4} + \dots$;

27. $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$;

28. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \dots$;

29. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$;

30. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots$.

3. Дослідити на збіжність ряди:

1. $1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{1 \cdot 2} + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots$;

2. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{(\sqrt{3})^2} + \frac{5}{(\sqrt{3})^3} + \dots + \frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n} + \dots$;

3. $\frac{2}{5} + \frac{2^2 \cdot 2^2}{5^2} + \frac{2^3 \cdot 3^2}{5^3} + \dots + \frac{2^n \cdot n^2}{5^n} + \dots$;

4. $10 + \frac{10^2}{2^2} + \frac{10^3}{3^3} + \dots + \frac{10^n}{n^n} + \dots$;

5. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$;

$$6. \frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3} + \dots + \frac{(n+1)!}{10^n} + \dots;$$

$$7. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots;$$

$$8. 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} + \dots;$$

$$9. 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots + \frac{n^n}{n!} + \dots;$$

$$10. \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots;$$

$$11. \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$$

$$12. \frac{3}{1^2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^2} + \dots + \frac{3^n}{n^2} + \dots;$$

$$13. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^n} + \dots;$$

$$14. \frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3^3} + \dots + \frac{(n+1)!}{3^n} + \dots;$$

$$15. 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots;$$

$$16. \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{3^n}{n(n+1)} + \dots;$$

$$17. \frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \dots + \frac{10^n}{2n+5} + \dots;$$

$$18. 2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \dots;$$

$$19. \frac{1!}{5} + \frac{2!}{5^2} + \frac{3!}{5^3} + \dots + \frac{n!}{5^n} + \dots;$$

$$20. 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots;$$

$$21. -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots;$$

$$22. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} + \dots;$$

$$23. \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots;$$

$$24. -\frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n-1}{2n+1} + \dots;$$

$$25. \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)!} + \dots;$$

$$26. \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n} + \dots;$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n-1};$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-1};$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+1)!};$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)^2}.$$

Змістовий модуль 8. Основи теорії ймовірності

Мета даної теми – актуалізація знань студентів про випадкові величини, навчання студентів первинній обробці статистичного матеріалу, підготовка їх до свідомого засвоєння в спеціальних предметах методів кількісної оцінки показників надійності виробів та систем.

При вивченні цієї теми слід розглянути такі питання:

Предмет теорії ймовірностей, випадковий експеримент, випадкова подія, класичне означення ймовірності. Теореми додавання та множення ймовірностей, використання їх для оцінювання показників надійності виробів та систем. Дискретні випадкові величини. Поняття про закон розподілу дискретної випадкової величини. Числові характеристики випадкових величин. Неперервні випадкові величини.

Теми, які виносяться на самостійне вивчення

1. Теореми додавання та множення ймовірностей

Дії над подіями та їх ймовірностями.

Більш складні випадкові події можна представити, як набір декількох більш простих. Наприклад, випадіння парного числа очок на гральній кості (подія А) може бути представлено, як набір подій A_1, A_2, A_3 , де A_1 - випадання двох очок; A_2 - випадання чотирьох очок; випадання шести очок. Для представлення складної події через більш прості вводять поняття додавання та множення подій.

СУМОЮ (об'єднанням) двох подій A і B називають подію C , яка полягає в здійсненні хоча б однієї із подій A або B

Символічний запис:

$$C = A + B \text{ або } C = A \cup B.$$

Добутком (перетином) двох подій A і B називають подію C , яка полягає в одночасному здійсненні і події A , і події B (рис. 2).

Символічний запис:

$$C = A \cdot B, \text{ або } C = A \cap B.$$

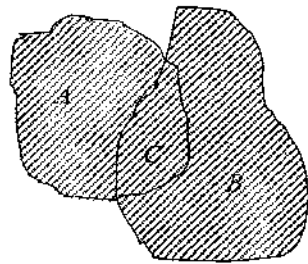


Рис. 1

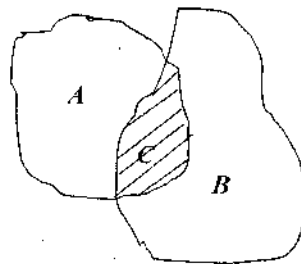


рис. 2

Приклад 1. Знайти суму подій: A - "поява одного очка при киданні гральної кості" і B - "поява двох очок при киданні гральної кості".

Розв'язання. Сумою $A+B$ є подія C - "поява не більше двох очок при киданні гральної кості". Тому $A+B=C$.

Приклад 2. Знайти добуток подій A - "студент на екзамені витягує білет з парним номером" і B - "студент витягає білет з номером, який кратний п'яти".

Розв'язання. Добутком $A \cdot B$ є подія C - "студент витягнув білет з номером, який кратний десяти", тому $A \cdot B = C$.

Ймовірності добутку й суми подій встановлюють за допомогою відповідних теорем.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.

Ймовірність появи однієї із кількох попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема множення ймовірностей незалежних подій.

Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема множення ймовірностей залежних подій.

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку однієї з них на умовну ймовірність другої.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_4(B) = P(B) \cdot P_8(A)$$

Приклад 3. В ящику лежать 20 деталей, причому 5 з них стандартні. Робітник бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з них стандартна (подія A).

Розв'язання: Нехай B - подія, яка полягає в тому, що одна взята деталь стандартна, а дві - нестандартні; C - подія, яка полягає в тому, що дві взяті деталі стандартні, а одна - нестандартна; D - подія, яка полягає в тому, що всі три взяті деталі стандартні.

Очевидно, що подія A відбудеться, якщо відбудеться хоча б одна з подій B, C, D .

Отже, подію A можна записати як суму подій B, C, D $A = B + C + D$.

Події B, C, D несумісні, отже

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} + \frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228}$$

Дану задачу можна розв'язати простіше, якщо ввести подію $\bar{A}$ - жодна з взятих трьох деталей не буде стандартною. Тоді

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

а знайшовши ймовірність події $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{91}{228},$$

Обчислимо

$$P(A) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228}.$$

Приклад 4. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число буде кратним або 3, або 5. або обом зразу.

Розв'язання: Нехай A - подія, яка полягає в тому, що вибране число кратне 3, а B - в тому, що вибране число кратне 5. Знайдемо $P(A+B)$.

Оскільки A, B - сумісні події, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Обчислимо: $P(A) = 30/90$ (серед чисел від 10 до 99 саме 30 кратні 3).

$P(B) = 18/90$ (чисел кратних 5 серед двоцифрових 18), $P(AB) = 6/90$ (числа 15, 30, 45, 60, 90, 75 кратні і 3 і 5), отже

$$P(A+B) = \frac{30}{90} + \frac{18}{90} - \frac{6}{90} = \frac{7}{15}.$$

Приклад 5. В ящику 12 деталей, серед них 8 бракованих. Робітник бере за один раз 2 деталі, а потім за другий раз ще 2 деталі. Яка ймовірність, що взяті деталі стандартні?

Розв'язання: Нехай подія A - полягає в тому, що перший раз взяті деталі стандартні; подія B - полягає в тому, що за другий раз взяті деталі стандартні.

Тому, що A, B -залежні події, то

$$P(AB) = P(A)P_{A|A}(B) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{56}{99}.$$

Приклад 6. В одній урні 5 білих і 3 чорних куль, а у другій - 6 білих і 4 чорні кулі. Яка ймовірність, що з обох урн візьмуть чорну кулю?

Розв'язання: Нехай A - подія, яка полягає в тому що чорну кулю взяли з першої урни; B - чорну кулю взяли з другої урни. Тому, що події A, B - незалежні, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} = \frac{3}{20}.$$

2. Дискретні випадкові величини. Поняття про закон розподілу дискретної випадкової величини. Неперервні випадкові величини. Числові характеристики випадкових величин.

Випадковою величиною називають змінну X , яка в результаті випробування може прийняти одне і лише одне значення, не відоме раніше і таке, що залежить від наслідку випробування. Можна пояснити, що величина буде випадковою, якщо вона приймає в даному випробуванні різні значення.

Випадкові величини поділяються на *дискретні* та *неперервні*. Ми розглядатимемо дискретні випадкові величини.

Величину X називаємо **дискретною випадковою величиною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або нескінченною послідовністю чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Де кожне співвідношення $X = x_i$ є елементарною випадковою подією і має визначену ймовірність $P = p_i$.

Оскільки, кожне значення дискретної випадкової величини має визначену ймовірність, то дані спостережень зручно заносити у таблицю:

табл. 1.

Значення випадкової величини X	x_1	x_2		x_n
Ймовірність цього значення P	p_1	p_2		p_n

Дана таблиця носить назву *таблиці закону розподілу дискретної випадкової величини*. Закон розподілу можна задати також у вигляді рівняння або графічно.

Означення Дві випадкової величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуває інша випадкова величина. У протилежному разі випадкові величини залежні.

Наведемо деякі приклади дискретних випадкових величин та їх розподілів.

1. Рівномірний дискретний розподіл: випадкова величина набуває n різних значень з імовірністю $1/n$ кожне.
2. Біноміальний розподіл.
3. Геометричний розподіл: проводяться незалежні випробування з імовірністю успіху p .

X - кількість спроб до першої появи події A , тобто до успіху; $q = 1 - p$. Закон розподілу подається таблицею:

X	0	1	2	...	n	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^n p$	...

4. Гіпергеометричний розподіл. Нехай в партії N виробів, із них n - бракованих. $N - n$ - якісних. Навмання вибирають k виробів. Знайти закон розподілу величини X - кількість бракованих виробів серед k .

$$p_i = P(X = r) = \frac{C_n^r C_{N-n}^{k-r}}{C_N^k}; \quad x_i = r = 0, 1, \dots, k.$$

Приклад 1. Вибираємо навмання одне з натуральних чисел від 1 до 10 і підраховуємо кількість його натуральних дільників X . Знайти закон розподілу випадкової величини X .

Складемо спочатку таблицю кількості дільників натуральних чисел:

Ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Вибір будь-якого числа від 1 до 10 є рівноможливим, тому ймовірність

його вибору дорівнює 0,1. Об'єднавши результати, що відповідають однаковій кількості дільників, і додавши їх імовірність, знайдемо закон розподілу X:

X	1	2	3	4
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Контроль: $0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,3 = 1$.

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину, але він може бути невідомим; тоді корисними є деякі сталі величини, які дають уявлення про випадкову величину. Такі сталі величини називають числовими характеристиками випадкових величин. Серед числових характеристик особливе значення має математичне сподівання.

Означення . Математичним сподіванням (або середнім значенням) дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності:

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (3)$$

Нехай випадкова величина може набувати значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ і всі її значення однаково ймовірні. Тоді ймовірність кожного з них $p = 1/n$.

Математичне сподівання цієї випадкової величини

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Отже, в даному разі математичним сподіванням випадкової величини є середнє арифметичне всіх її можливих значень. У загальному випадку математичне сподівання випадкової величини не буде середнім арифметичним всіх її можливих значень. Проте в деякому розумінні його можна розглядати саме так. Справа в тому, що в задачах практичного спрямування закон розподілу випадкової величини є невідомим. Тому виконують велику кількість випробувань або спостережень, кожне з яких відбувається у приблизно однакових умовах. Таку сукупність спостережень називають вибіркою із значень, яких набуває дана величина

Нехай у вибірці з p спостережень за випадковою величиною X ця величина p_1 разів набувала значення $x_1, \dots$; p_2 разів - значення $x_2, \dots$; p_k разів - значення x_k , причому $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$. Тоді сума всіх значень, які спостерігались, дорівнює $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k$. Величина

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n} \quad (4)$$

називається **вибірковим середнім**.

Зауважимо, що відношення n_1/n є відносною частотою значення x_1 , n_2/n є відносною частотою значення x_2 , n_k/n є відносною частотою значення x_k , причому відношення $n_1/n, n_2/n, \dots, n_k/n$ змінюються від вибірки до вибірки.

Проте за достатньо великої кількості спостережень p маємо наближені рівності

$$\frac{n_1}{n} \approx p_1, \frac{n_2}{n} \approx p_2, \dots, \frac{n_k}{n} \approx p_k. \quad (5)$$

Підставивши (5) у (4), дістанемо

$$\bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = M(X). \quad (6)$$

Це означає, що математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більше число спостережень) вибірковому середньому.

Властивості математичного сподівання:

- 1) $M(C) = C$, де C – стала величина;
- 2) $M(X + C) = M(X) + C$;
- 3) $M(k \cdot X) = k \cdot M(X)$, де k – довільне число;
- 4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ для будь-яких X і Y ;
- 5) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

Точку з координатою $M(X)$ називають центром розсіювання ймовірностей. Випадкову величину $X - M(X)$ називають відхиленням. Різні випадкові величини можуть мати одне й те саме математичне сподівання. Тому виникає потреба розглянути ще одну числову характеристику для вимірювання ступеня розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Означення Дисперсією випадкової величини називається математичне

сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини.

Позначається дисперсія $D(X)$. Отже,

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (7)$$

Поряд з дисперсією розглядають також характеристику, яка вимірюється в тих самих одиницях, що і випадкова величина.

Означення Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається корінь квадратний з її дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (8)$$

Приклад . Знайти числові характеристики випадкової величини, яку розглянуто у прикладі 1:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 = 2,7.$$

Складемо закон розподілу випадкової величини $Y = (X - 2,7)^2$:

Y_k	2,89	0,49	0,09	1,69
p_k	0,1	0,4	0,2	0,3

$$\begin{aligned} D(X) &= (x_1 - 2,7)^2 p_1 + (x_2 - 2,7)^2 p_2 + (x_3 - 2,7)^2 p_3 + (x_4 - 2,7)^2 p_4 = \\ &= y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3 + y_4 p_4 = 2,89 \cdot 0,1 + 0,49 \cdot 0,4 + 0,09 \cdot 0,2 + \\ &\quad + 1,69 \cdot 0,3 = 0,289 + 0,196 + 0,018 + 0,507 = 1,010; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,010} \approx 1,005.$$

Теорема (формула обчислення дисперсії). Дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата і квадратом математичного сподівання цієї випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (9)$$

Дійсно, згідно з властивостями $M(X)$, знаходимо

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = \\ &= M(X^2) - (M(X))^2. \end{aligned}$$

Властивості дисперсії:

- 1) $D(C) = 0$, де C – стала;
- 2) $D(CX) = C^2 D(X)$;
- 3) $D(C + X) = D(X)$;
- 4) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, якщо X і Y – незалежні;
- 5) $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$, якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно незалежні.

Вибірковою дисперсією називається вираз

$$S^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{n}, \quad (10)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_k$ різні значення випадкової величини, що спостерігаються; $n_1, n_2, \dots, n_k$ – їхні частоти; $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ – загальна кількість спостережень; $\bar{x}$ – вибіркове середнє. Величину S називають вибірквим середнім квадратичним, або стандартним відхиленням.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
2. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей сумісних подій.
3. Що називають умовною ймовірністю подій?
4. Формулювати теореми множення ймовірностей залежних та незалежних подій.
5. Що називається дискретною випадковою величиною?
6. Як скласти закон розподілу дискретної випадкової величини?
7. Що називається математичним сподіванням і як його обчислюють?
8. Перелічіть властивості математичного сподівання.

Завдання для самостійної роботи

1. В урні лежать 12 білих та 4 чорних куль. Яка ймовірність одночасно витягнути 3 білих та 1 чорну кулю?
2. В урні лежать 6 білих та 8 чорних куль. Яка ймовірність за першим разом взяти 2 білі, а за другим 2 чорні кулі?
3. В урні лежать 3 білі, 7 червоних та 5 чорних куль. Яка ймовірність того, що серед взятих 4-х куль всі червоні?
4. З колоди карт навмання беруть 2. Яка ймовірність, що взяті карти тузи?

5. З 30 білетів студент вивчив 25, Яка ймовірність того, що витягнутий ним білет він не знає?
6. З цифр від 1 до 9 вибирають одну. Яка ймовірність, що вибрана цифра кратна 3?
7. В лотереї з 15 білетів 5 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що обидва білети виграшні?
8. В лотереї з 30 білетів 10 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що жоден білет невикрашній?
9. В урні лежать 10 білих та 5 чорних куль. Яка ймовірність одночасно витягнути 2 білих та 1 чорну кулю?
10. В урні лежать 5 білих та 7 чорних куль. Яка ймовірність за першим разом взяти 2 білі, а за другим 2 чорні кулі?
11. В урні лежать 2 білі, 5 червоних та 3 чорних куль. Яка ймовірність того, що серед взятих 5-ти куль всі червоні?
12. З колоди карт навмання беруть 3. Яка ймовірність, що взяті карти тузи?
13. З 30 білетів студент вивчив 27, Яка ймовірність того, що витягнутий ним білет він не знає?
14. З цифр від 1 до 9 вибирають одну. Яка ймовірність, що вибрана цифра кратна 2?
15. В лотереї з 15 білетів 10 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що обидва білети виграшні?
16. В лотереї з 35 білетів 15 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що жоден білет невикрашній?
17. Серед 30 учнів 18 хлопців та 12 дівчат. Яка ймовірність, що вибрали 2 хлопці і 2 дівчини?
18. Робітник обслуговує 2 автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший автомат не потребує уваги робітника 0,8, а для другого автомата ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що протягом години жодний з автоматів не потребує уваги робітника.
19. Під час обробки деталей на верстаті в середньому 4% з них бувають з дефектами. Яка ймовірність того, що кожні 2 деталі з 30 взятих на перевірку будуть з дефектами?
20. Серед 25 учнів 10 хлопців та 15 дівчат. Яка ймовірність, що вибрали 3 хлопці і 4 дівчини?

Література

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу 10-11 класи-К, Зодіак-ЕКО, 2000.
2. Алгебра і початки аналізу /За ред. Колмогорова А.М., Освіта, 1993/
3. Математика: Програма для навчальних закладів підготовки молодших спеціалістів /Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.К-2001.
4. Афанасьєва, Бродский Я.С, Гуткин И.И., Павлов А.Л. Сборник задач по математике для техникумов. – М : Наука, 1992
5. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа /Под ред. Г.Н. Яковлева. Ч.2. – М.:Наука, 1987
6. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа /Под ред. Г.Н. Яковлева. Ч.2. – М.:Наука, 1968
7. М.І.Шкіль, Т.В.Колесник, В.М.Котлова Вища математика (у трьох книгах), К.Либідь, 1994р
8. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- М:Выс.шк, 1979, 1983, 1990.
9. О.М.Афанасьєва, Бродський Я.С, Павлов А.Л., А.К.Слипенко. Дидактичні матеріали з математики-К. Вища школа, 2001р.
10. Вычислительная математика / Н.И.Данилина и др.-М:Высш.шк, 1985
11. О.М.Афанасьєва, Бродский Я.С, Павлов А.Л., А.К.Слипенко. Математика-К.Вища школа, 2001р.
12. Вычислительная математика-Н.И.Данилина и др.- М.Высш.школа, 1985г.

Допоміжна література

1. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Інтеграл та його застосування» -ХЕМТТБ. 2011р.
2. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Похідна та її застосування» -ХЕМТТБ. 2011р.
3. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів по темі «Комплексні числа» -ХЕМТТБ. 2005р.
4. Методична розробка „Організація пізнавальної діяльності студентів при вивченні теми «РЯДИ» з дисципліни “Основи вищої математики””- ХЕМТТБ. 2009 р.
5. Презентація по темі «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» -ХЕМТТБ. 2013 р.

інформаційні ресурси

1. <http://math.ru>
2. <http://www.webmath.ru>
3. <http://www.formula.co.ua>
4. <http://ru.wikipedia.org>